Národní informační středisko pro podporu kvality

Testování způsobilosti a výkonnosti výrobního procesu

RNDr. Jiří Michálek, CSc
Ústav teorie informace a automatizace AVČR

UKAZATELE ZPŮSOBILOSTI

UKAZATELE ZPŮSOBILOSTI

Předpokládá se :
- normální rozdělení N(μ , σ) sledovaného znaku jakosti;
- k podskupin stejného rozsahu n jednotek (k*n = N).

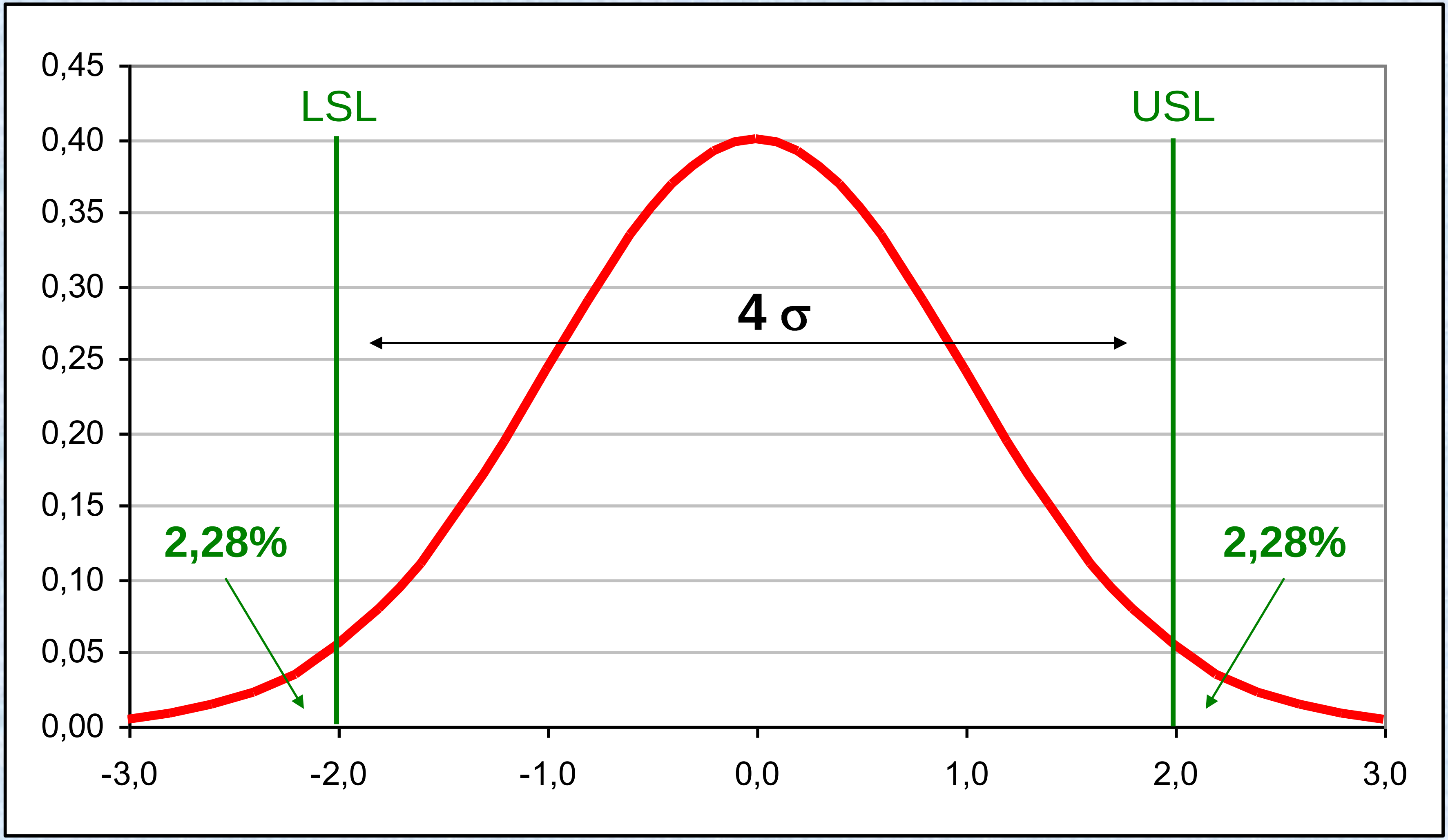
$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

$$\sigma \approx s = \bar{R}/d_2 \quad ; \quad \bar{s}/C_4 \; ; \quad \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j^2}$$

Průměrná směrodatná odchylka s charakterizuje variabilitu uvnitř k podskupin stejného rozsahu n . Rozptyl $s_j^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2$ pro j = 1, 2, ..., k je rozptylem j-té podskupiny a $\bar{s} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j$ je průměrná směrodatná odchylka v k podskupinách.

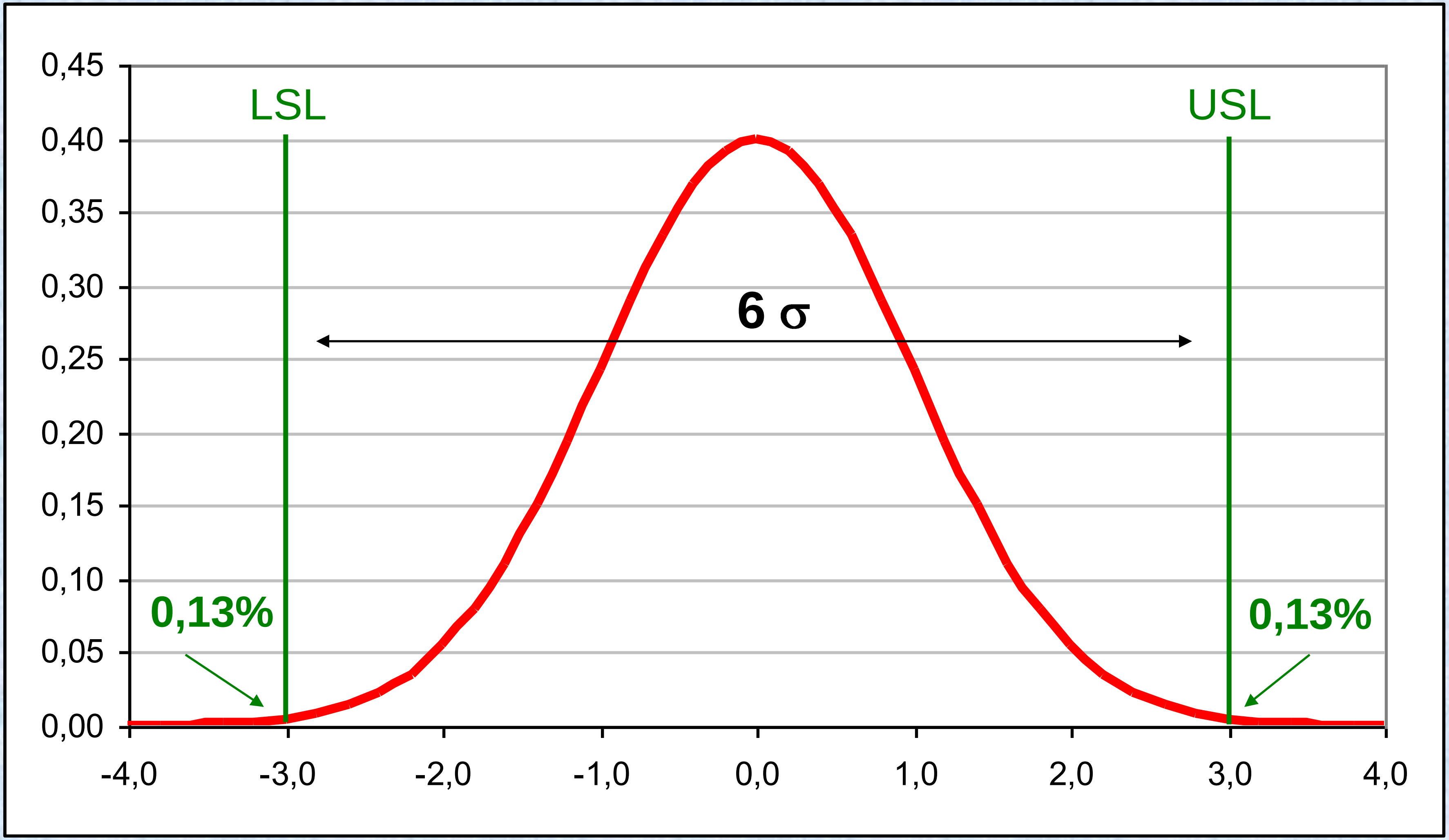
$C_p < 1$ - proces není způsobilý

$(USL - LSL) = 4\,\sigma$; $C_p = 0{,}67$



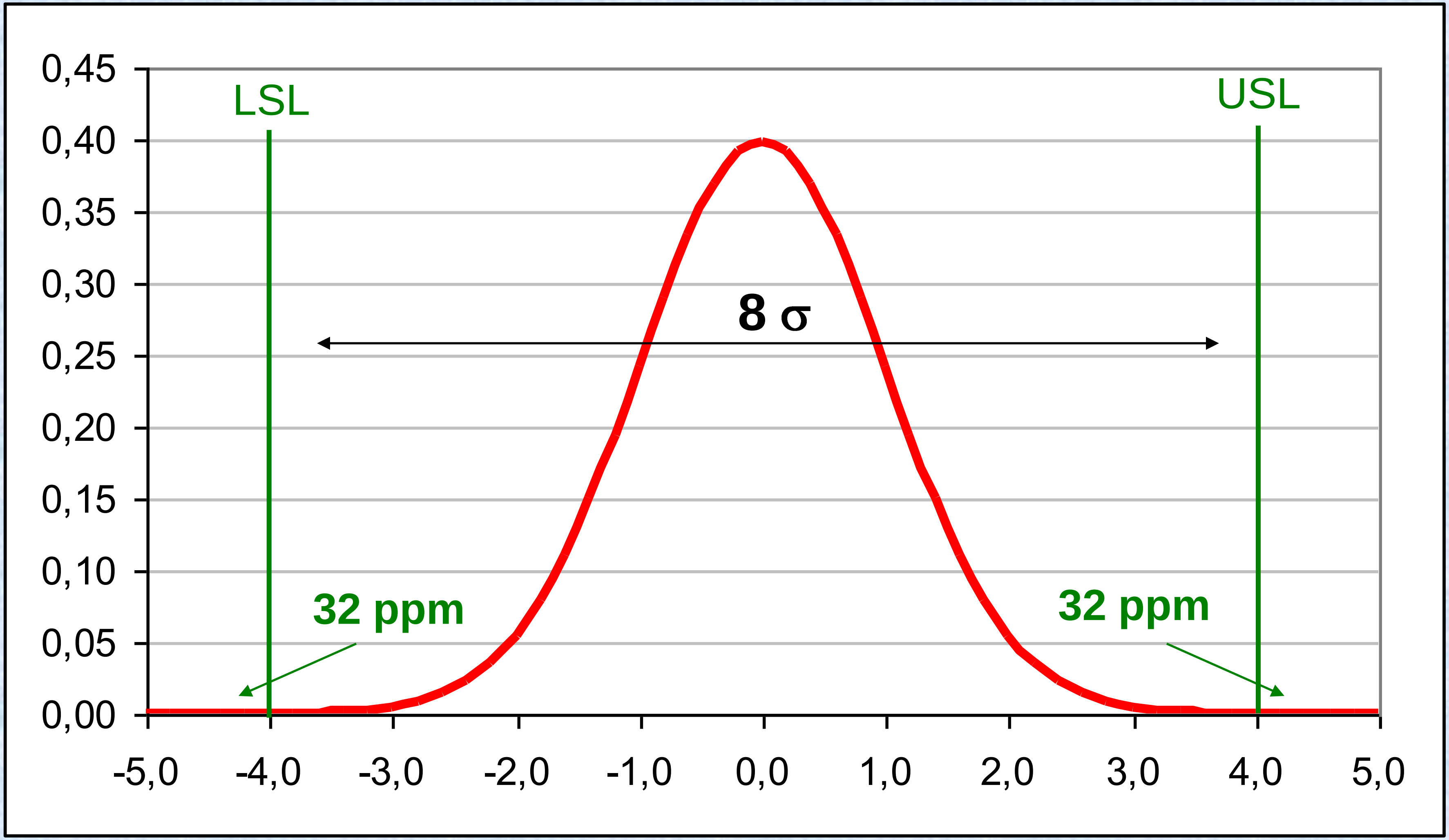
C_p = 1 - proces je blízký způsobilosti

(USL - LSL) = 6 σ; C_p = 1,0



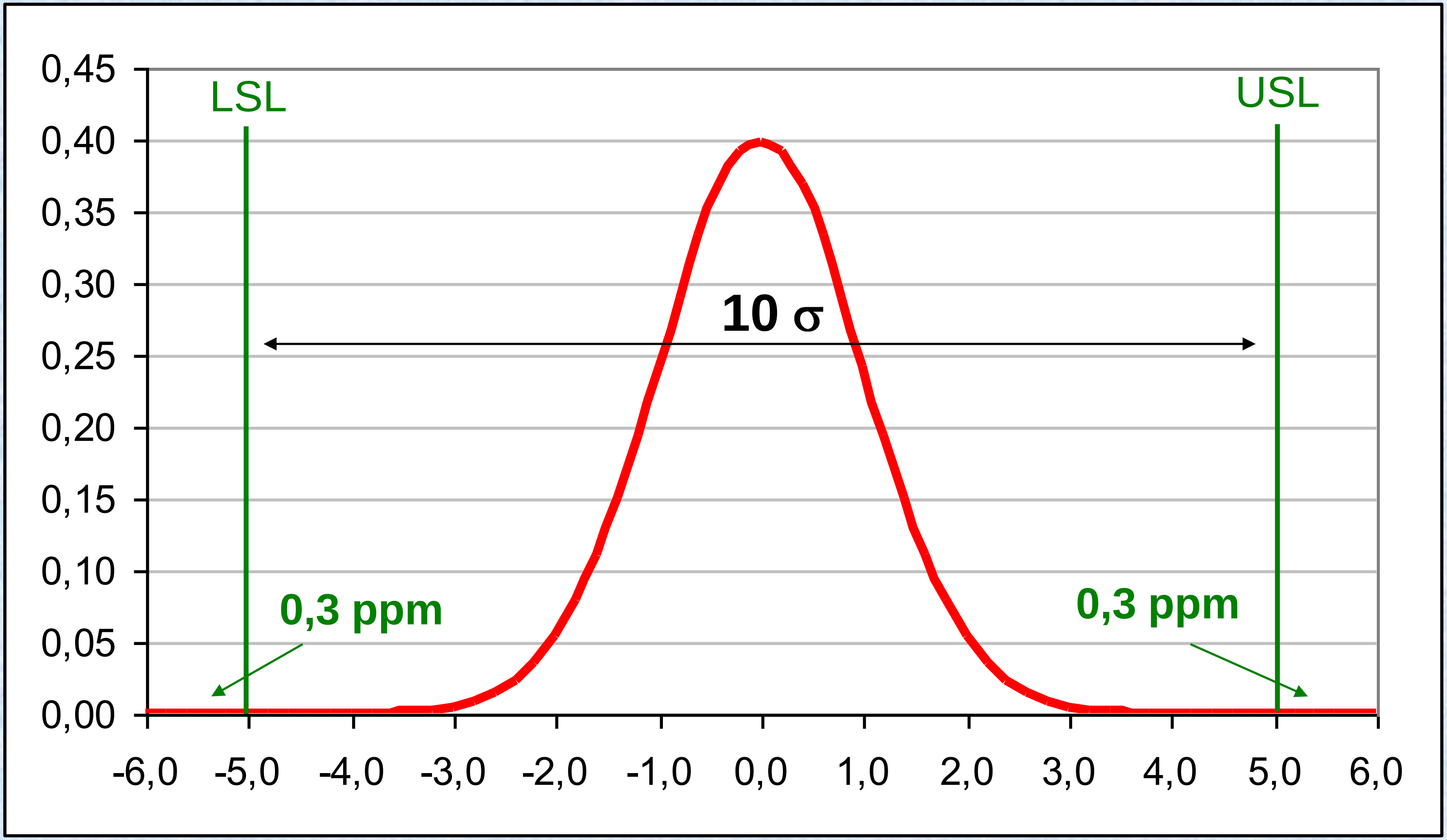
$C_p \geq 1{,}33$ - proces je způsobilý

$$(USL - LSL) = 8\,\sigma; \qquad C_p = 1{,}33$$



$C_p \geq$ 1,67 - proces je způsobilý

(USL - LSL) = 10 σ , C_p = 1,67



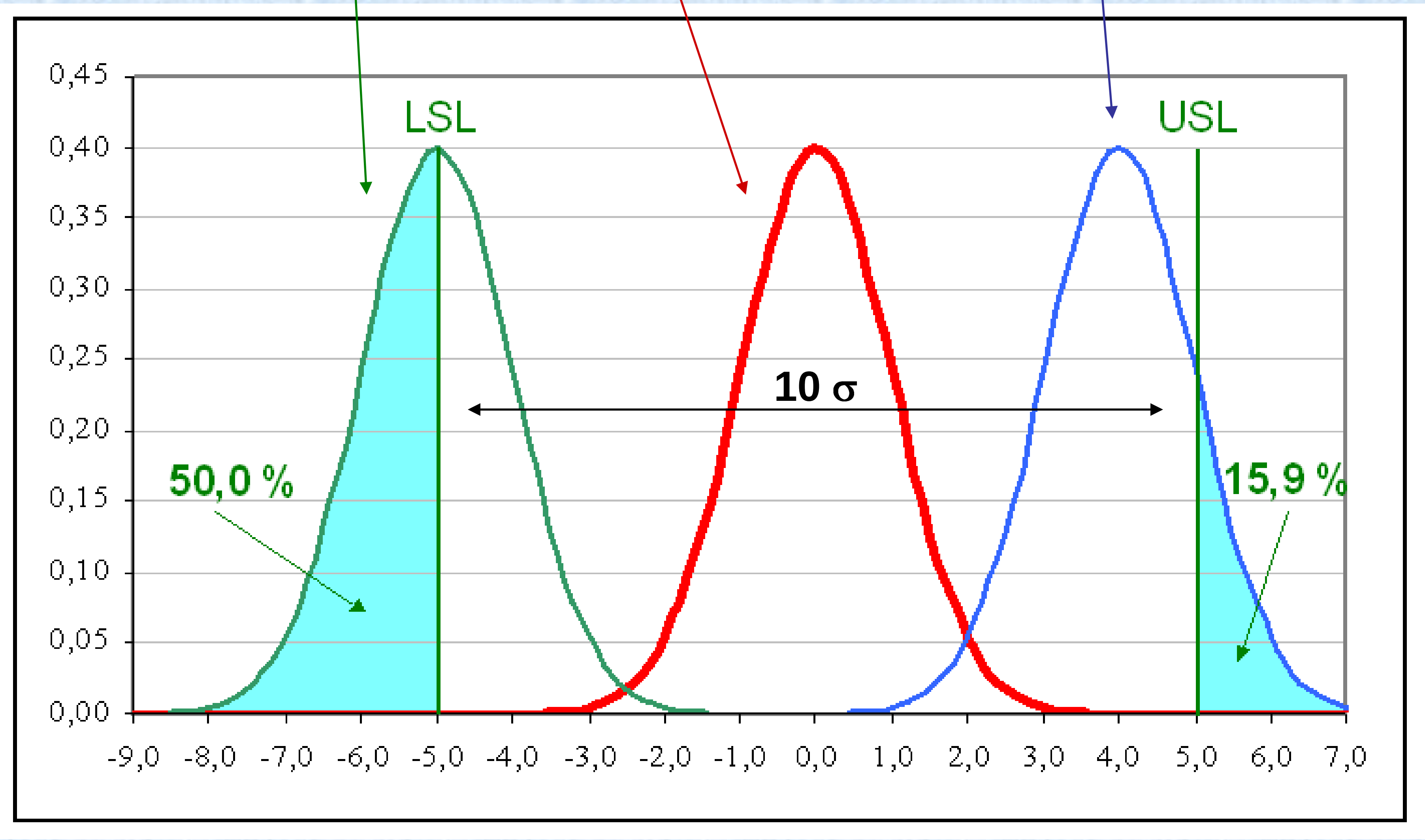
$$\boxed{C_{pk} = \min\left\{\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right\}}$$

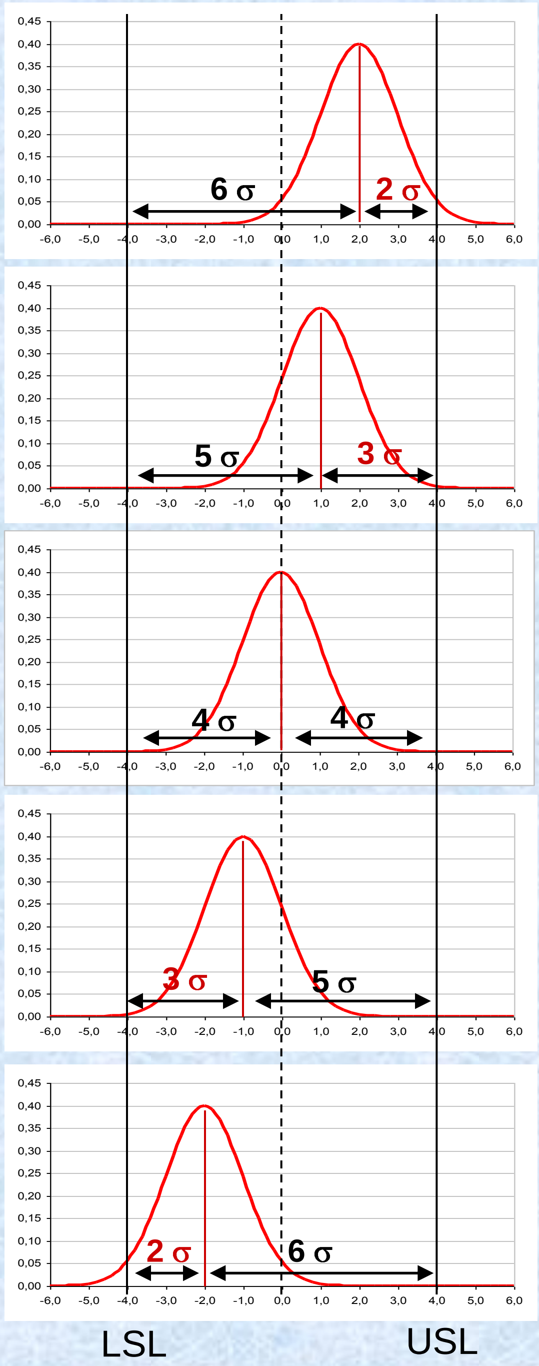
$$\sigma \approx s = \overline{R}/d_2 \quad ; \quad \overline{s}/C_4 \; ; \qquad \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j^2}$$

$$\mu \approx \overline{\overline{x}} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \overline{x}_j$$

C_p = 1,67 - způsobilé procesy, špatně centrované

C_{pk} = 0 ; C_{pk} = 1,67 ; C_{pk} = 0,33





μ	C_p	C_{pL}	C_{pU}
2	1,33	2,00	**0,66**
1	1,33	1,67	**1,00**
0	1,33	1,33	1,33
- 1	1,33	**1,00**	1,67
- 2	1,33	**0,66**	2,00

UKAZATEL ZPŮSOBILOSTI C_p

nepřihlíží k otázce centrování procesu.

Charakterizuje pouze

ČEHO JSME SCHOPNI DOSÁHNOUT

UKAZATEL ZPŮSOBILOSTI C_{pk}

přihlíží k dosaženému stupni centrování procesu.

Charakterizuje

ČEHO JSME SKUTEČNĚ DOSÁHLI

INTERPRETACE VLASTNOSTÍ UKAZATELŮ ZPŮSOBILODSTI A VÝKONNOSTI

1. Všechny ukazatele způsobilosti a výkonnosti jsou bezrozměrné veličiny.

2. Má-li náhodná veličina normální rozdělení N(μ, σ^2) a proces probíhá za působení pouze náhodných příčin variability, t.j. proces je ve statisticky zvládnutém stavu – z hlediska průměru procesu je centrován (tedy platí μ = (USL + LSL) / 2 a z hlediska variability má stálou a známou směrodatnou odchylku σ, potom

a) garance, např. při C_p = 1, vyjadřuje, že
“podíl neshodných v procesu bude v průměru 0,27 %”
a nikoliv, že “podíl neshodných v procesu nepřesáhne 0,27 %”;

b) “jakost” odhadu ukazatele C_p, C_{pk} závisí na “jakosti” odhadu příslušné směrodatné odchylky.

DOHODA MEZI ODBĚRATELEM A DODAVATELEM

Při každém vyšetřování způsobilosti, požadovaném zejména odběratelem je nutno stanovit (dohodnout):

- **podmínky experimentu**, jako např.:
  - počet podskupin,
  - rozsah podskupin,
  - kontrolní interval,
  - způsob odběru vzorků,
  - specifikace,
  - metodu statistické regulace;

- **postup zpracování výsledků**, jako např.:
  - způsob odhadu směrodatné odchylky σ ,
  - analytický tvar ukazatele způsobilosti,
  - konfidenční úroveň $1 - \alpha$.

Hustoty rozdělení pravděpodobnosti odhadů koeficientů C_p

Tvary hustot

- Tvar hustoty rozdělení pravděpodobnosti odhadu závisí na typu odhadu parametru σ

1. σ je odhadnuta z n pozorování
2. σ je odhadnuta z pozorování ve skupinách:

a) na základě rozpětí ve skupinách

b) na základě směr. odchylky ve skupinách

1) Náhodný výběr x_1, x_2, ... , x_n z rozdělení znaku jakosti $N(\mu, \sigma^2)$ s odhadem směrodatné odchylky s_n,

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} ,$$

pak

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\,s_n} = C_p \cdot \frac{\sigma}{s_n} .$$

Tvar hustoty

$$f_{\hat{C}_p}(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{\rho_n}{x^2}} \frac{1}{x^n} \rho_n^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{pro} \quad x > 0 ,$$

kde

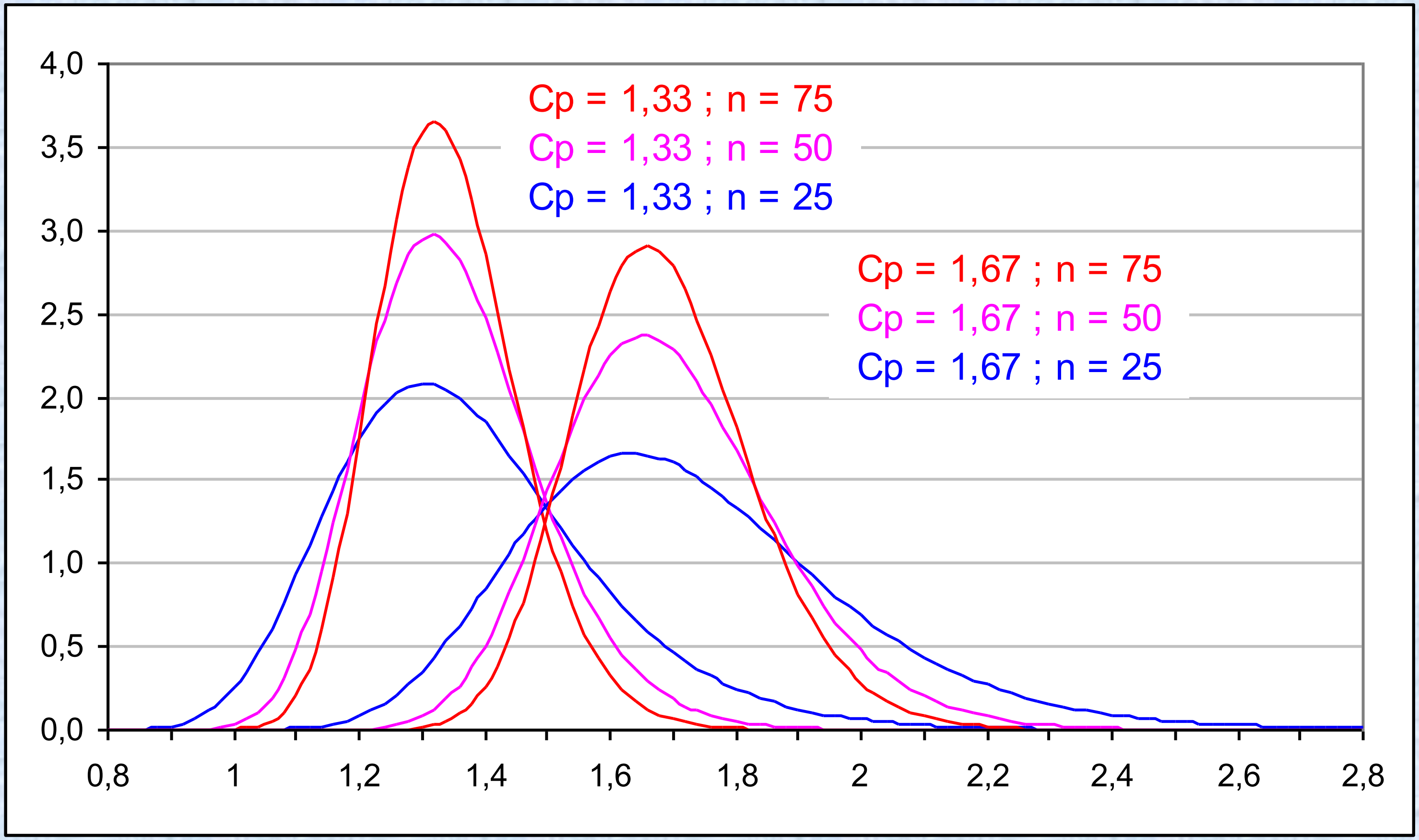
$$\rho_n = \frac{n-1}{2} \cdot C_p^2 ;$$

$$f_{\hat{C}_p}(x) = 0 \qquad \text{pro} \quad x \le 0 .$$

Např. pro n = 50, C_p = 1,33 jsou kvantily :

α	$C_p(\alpha)$
0,01	1,076
0,025	1,111
0,05	1,143
0,5	1,339
0,95	1,598
0,975	1,657
0,99	1,731

Tvary hustoty odhadu $\hat{C}_p$ pro různé počty pozorování; odhad s_n



2a) Výběr je proveden z podskupin o rozsahu n , k dispozici je k podskupin pozorování x_{ij} , $i = 1, 2, ..., k$; $j = 1, 2, ..., n$.

Směrodatná odchylka σ je odhadována pomocí odhadu

$$s_R = \frac{\overline{R}}{d_2(n)} ,$$

kde , $R_i = \max x_{ij} - \min x_{ij}$.

Hustotu lze pak aproximovat tvarem:

$$f_{\hat{C}_p}(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k}{2}\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\left(\frac{C_p}{x}-1\right)^2} \frac{\alpha_n}{\beta_n}\frac{\sqrt{k}}{x^2} C_p \qquad \text{pro } x > 0 ,$$

$$f_{\hat{C}_p}(x) = 0 \qquad \text{pro } x \leq 0 .$$

Koeficienty α_n a β_n jsou tabelovány v závislosti na rozsahu podskupiny. Platí

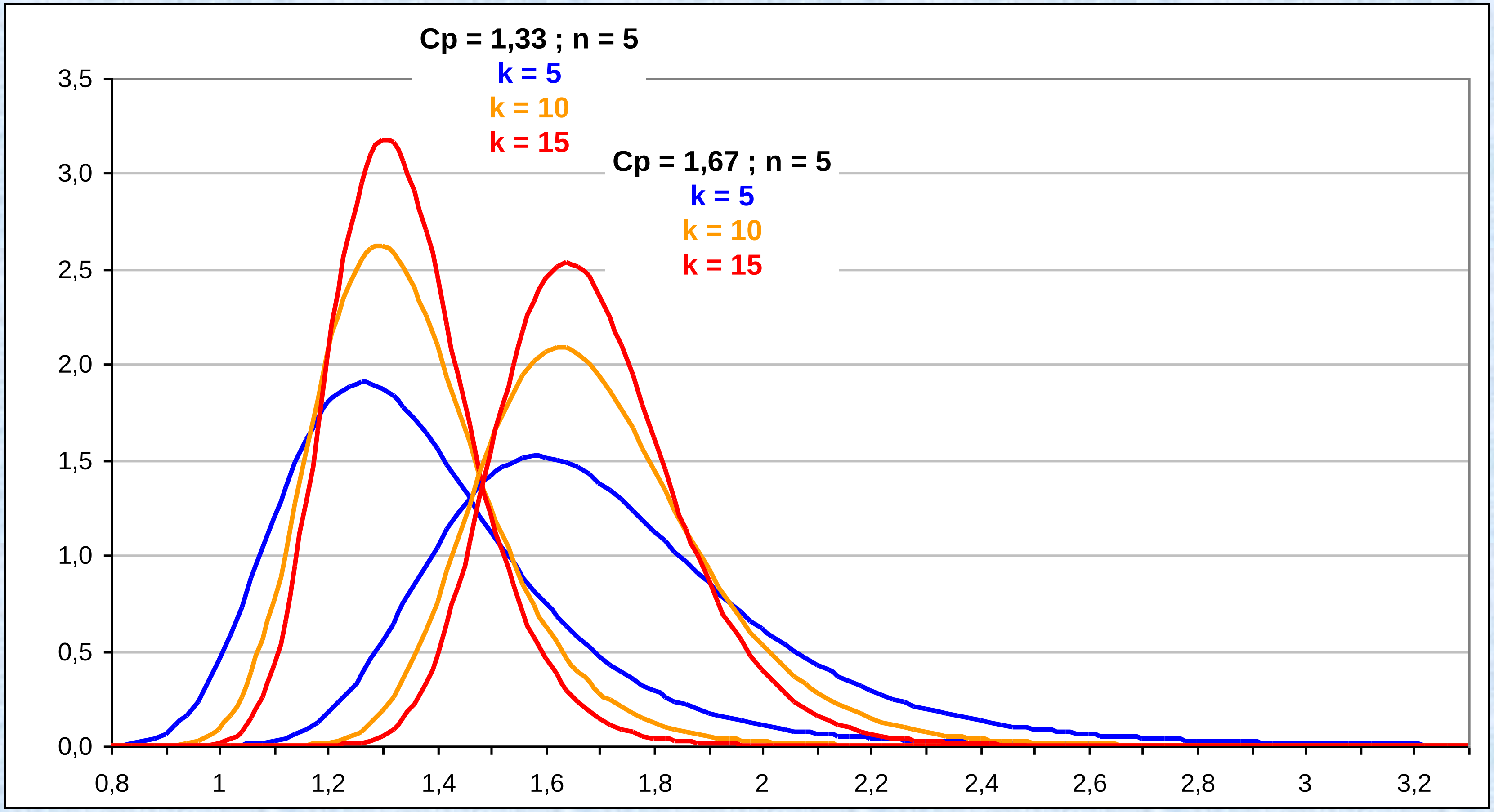
$$E(R_i) = \alpha_n \sigma \quad , \quad D(R_i) = \beta_n^2 \sigma^2 .$$

Např. pro k = 10, n = 5, C_p = 1,33 jsou kvantily:

α	$C_p(\alpha)$
0,01	1,045
0,025	1,081
0,05	1,115
0,5	1,330
0,95	1,649
0,975	1,728
0,99	1,830

Tvary hustoty odhadu $\hat{C}_p$ pro různé počty pozorování;

odhad $\dfrac{\overline{R}}{d_2(n)}$



Tabulka koeficientů α_n a β_n

n	α_n	β_n
2	1,128	0,853
3	1,693	0,888
4	2,059	0,880
5	2,326	0,864
6	2,534	0,848
7	2,704	0,833
8	2,847	0,820
9	2,970	0,808
10	3,078	0,797
11	3,173	0,787
12	3,258	0,778
13	3,336	0,770
14	3,407	0,762
15	3,472	0,755
16	3,532	0,749
17	3,588	0,743
18	3,640	0,738
19	3,689	0,733
20	3,735	0,729

2b) Výběr je proveden z podskupin o rozsahu n, k dispozici je k podskupin – pozorování x_{ij}, $i = 1, 2, ..., k$; $j = 1, 2, ..., n$.

Směrodatná odchylka σ je odhadována pomocí odhadu

$$s_s = \frac{\bar{s}}{C_4(n)} ,$$

kde $\bar{s} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} s_i$, $s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2}$.

Hustotu lze pak aproximovat tvarem:

$$f_{\hat{C}_p}(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k}{2}\frac{a_{n-1}^2}{b_{n-1}^2}\left(1-\frac{C_p}{x}\right)^2} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \frac{\sqrt{k}}{x^2} C_p \qquad \text{pro } x > 0 ,$$

$$f_{\hat{C}_p}(x) = 0 \qquad \text{pro } x \le 0 ,$$

kde

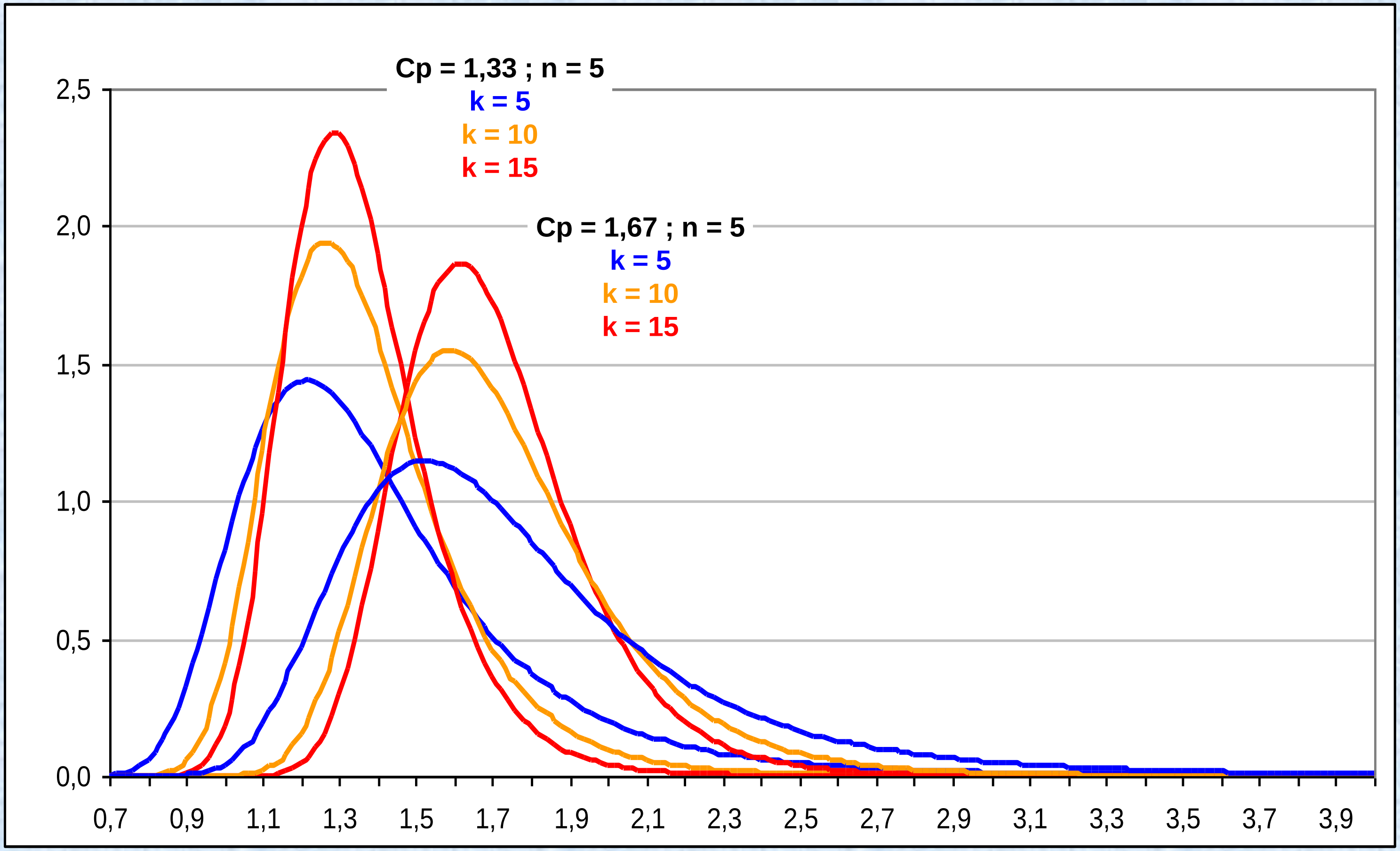
$$a_{n-1} = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cong \sqrt{1-\frac{1}{2(n-1)}} \quad \text{a} \quad b_{n-1}^2 = 1-\frac{2}{n-1}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cong \frac{1}{2(n-1)} .$$

Např. pro k = 10, n = 5, C_p = 1,33 jsou kvantily:

α	$C_p(\alpha)$
0,01	0,965
0,025	1,009
0,05	1,050
0,5	1,330
0,95	1,815
0,975	1,951
0,99	2,137

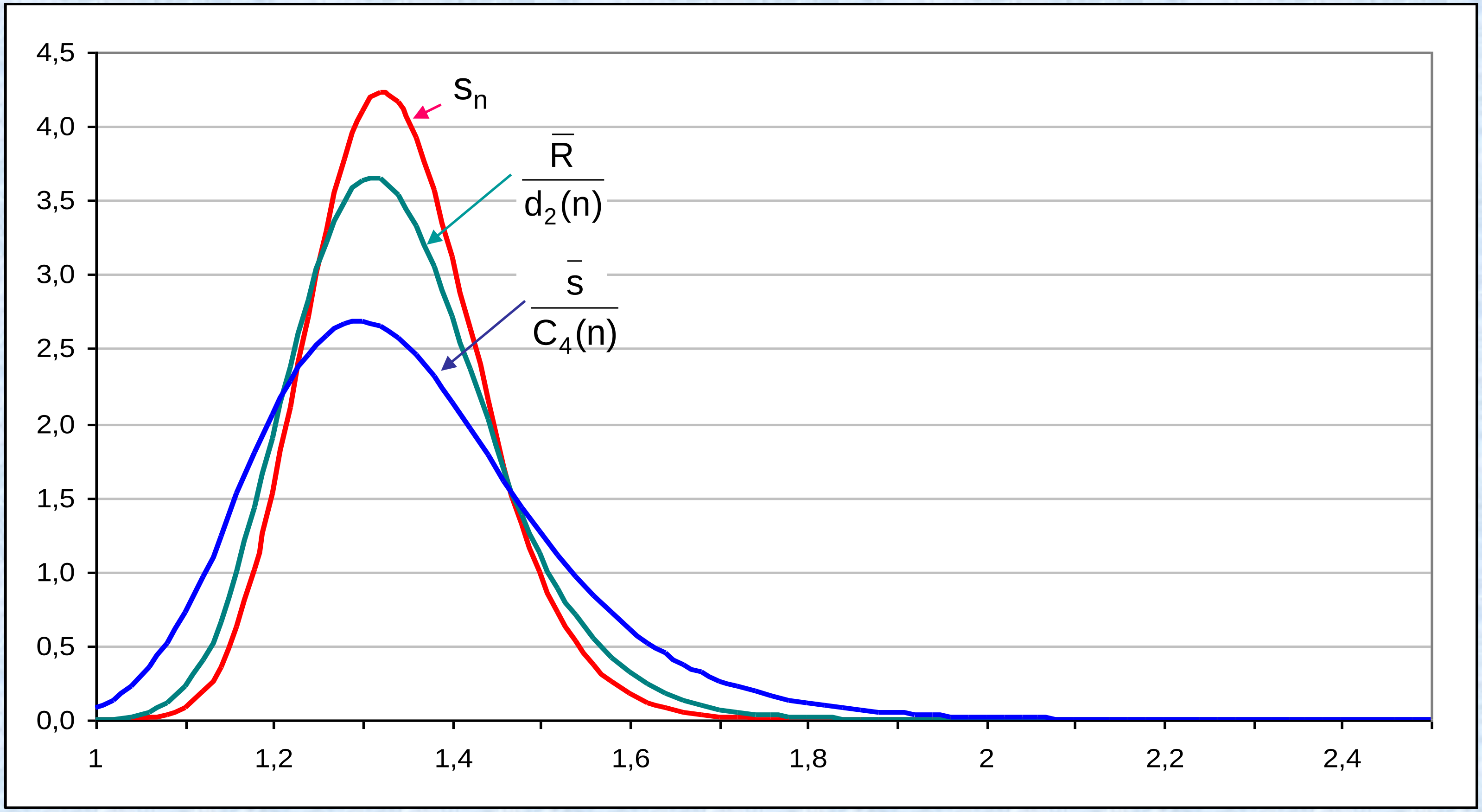
Tvary hustoty odhadu $\hat{C}_p$ pro různé počty pozorování;

odhad $\dfrac{\bar{s}}{C_4(n)}$

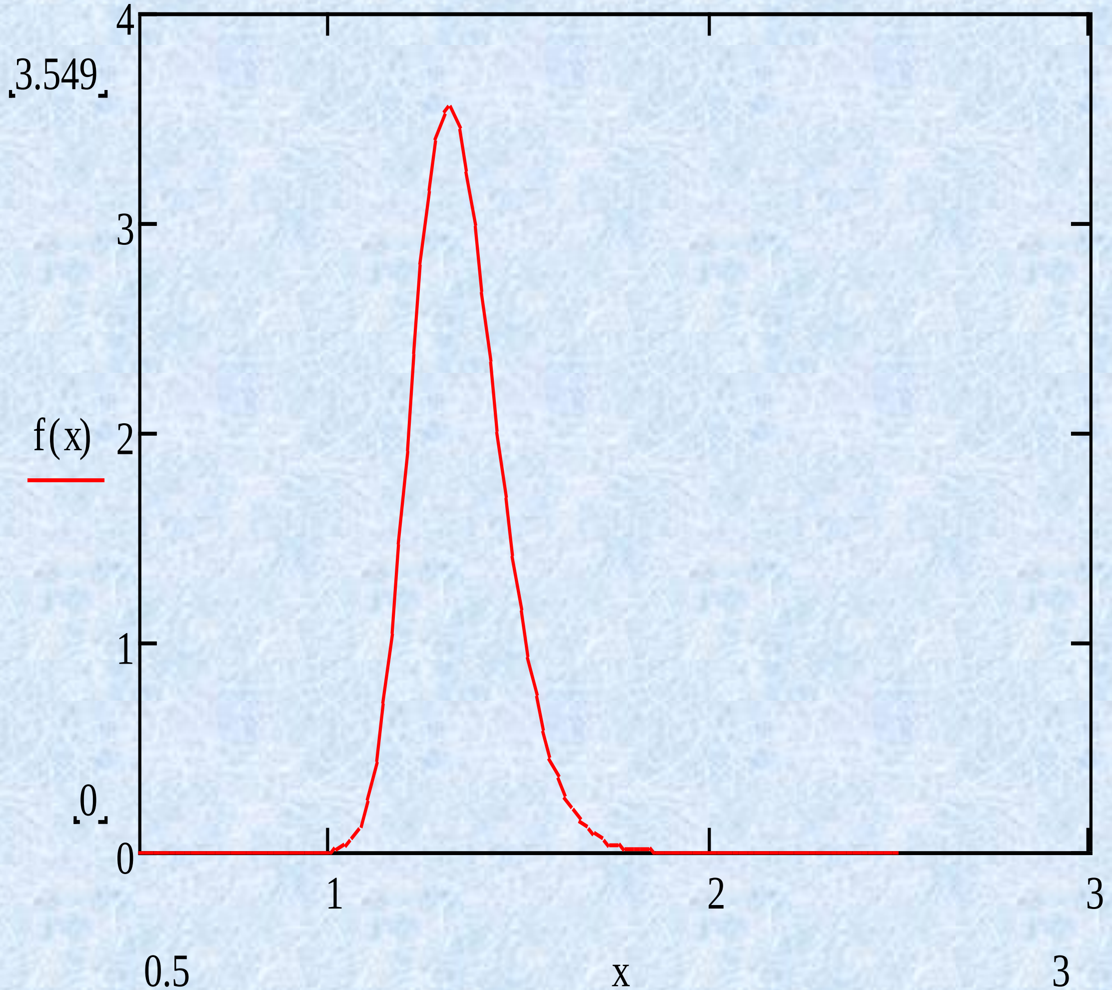


Tvary hustoty odhadu $\hat{C}_p$ pro n = 5; k = 20; (tj. N = 100) a C_p = 1,33;

odhady s_n, $\dfrac{\overline{R}}{d_2(n)}$, $\dfrac{\overline{s}}{C_4(n)}$



Hustota psti pro odhad ukazatele Cp=1,33 při užití rozpětí R, k=25, n=4



1%-kvantil = 1,11

99%-kvantil= 1,66

Hustoty rozdělení pravděpodobnosti odhadů koeficientů C_{pk}

Odhad je založen na výběru $x_1, x_2, ..., x_n$ či na výběru seskupeného do tříd získaného měřením znaku jakosti, který lze popsat normálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$.

Platí

$$C_{pk} = (1-K)\, C_p \, ,$$

kde

$$K = \frac{\left|\mu - \frac{1}{2}(USL + LSL)\right|}{\Delta} \, , \quad \Delta = 0.5\,(USL - LSL) \, ,$$

tudíž

$$\hat{C}_{pk} = (1 - \hat{K})\, \hat{C}_p \, ,$$

kde

$$\hat{K} = \frac{\left|\bar{x} - \frac{1}{2}(USL + LSL)\right|}{\Delta} \, .$$

Důležité:

veličiny $\hat{K}$ a $\hat{C}_p$ jsou nezávislé, vycházíme-li z $N(\mu, \sigma^2)$.

Opět máme tři možnosti jak odhadnout C_p:

1. C_p je odhadnut pomocí s_n ,

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2} \quad .$$

2. C_p je odhadnut pomocí s_R ,

$$s_R = \frac{\bar{R}}{d_2(n)} \quad .$$

3. C_p je odhadnut pomocí s_s ,

$$s_s = \frac{\bar{s}}{C_4(n)} \quad .$$

Koeficienty $d_2(n)$ a $C_4(n)$ jsou tabelovány, např. viz ČSN ISO 8258.

Tvar hustoty rozdělení pravděpodobnosti pro veličinu $1-\hat{K}$:

1. pro případ s_n :

$$f_{1-\hat{K}}(x) = 6C_p\sqrt{n}\left\{\varphi\left(6C_p\sqrt{n}\left(1-x-\frac{\mu-T}{\Delta}\right)\right)+\varphi\left(6C_p\sqrt{n}\left(x-1-\frac{\mu-T}{\Delta}\right)\right)\right\}$$

kde $T = \frac{1}{2}(USL+LSL)$, Δ = 0.5 (USL – LSL), $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$

Uvažujeme

$$f_{\hat{C}_p}(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}e^{-\frac{\rho_n}{x^2}}\frac{1}{x^n}\rho_n^{\frac{n-1}{2}} \qquad \text{pro } x > 0,$$

kde

$$\rho_n = \frac{n-1}{2}\cdot C_p^2 \ .$$

2. pro případ s_R či s_s :

$$f_{1-\hat{K}}(x) = 6\,C_p\sqrt{k\,n}\left\{\varphi\left(6\,C_p\sqrt{k\,n}\left(1-x-\frac{\mu-T}{\Delta}\right)\right)+\varphi\left(6\,C_p\sqrt{k\,n}\left(x-1-\frac{\mu-T}{\Delta}\right)\right)\right\}$$

kde k je počet podskupin, n je rozsah podskupiny.

V případě s_R je

$$f_{\hat{C}_p}(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{k}{2}\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}\left(\frac{C_p}{x}-1\right)^2}\frac{\alpha_n}{\beta_n}\frac{\sqrt{k}}{x^2}C_p \qquad \text{pro } x > 0\,;$$

v případě s_s je

$$f_{\hat{C}_p}(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{k}{2}\frac{a_{n-1}^2}{b_{n-1}^2}\left(1-\frac{C_p}{x}\right)^2}\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\frac{\sqrt{k}}{x^2}C_p \qquad \text{pro } x > 0\,.$$

Uvažované koeficienty α_n, β_n, a_n a b_n byly již definovány.
Definiční obor hustoty pravděpodobnosti $f_{1-\hat{K}}(x)$ je $(-\infty, 1\rangle$. Mimo tento obor je vždy $f_{1-\hat{K}}(x) = 0$.

Obecný vzorec pro hustotu pravděpodobnosti odhadů $\hat{C}_{pk}$ je:

$$f_{\hat{C}_{pk}}(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{u} f_{\hat{C}p}(u) f_{1-\hat{K}}\left(\frac{x}{u}\right) du \qquad \text{pro } x > 0,$$

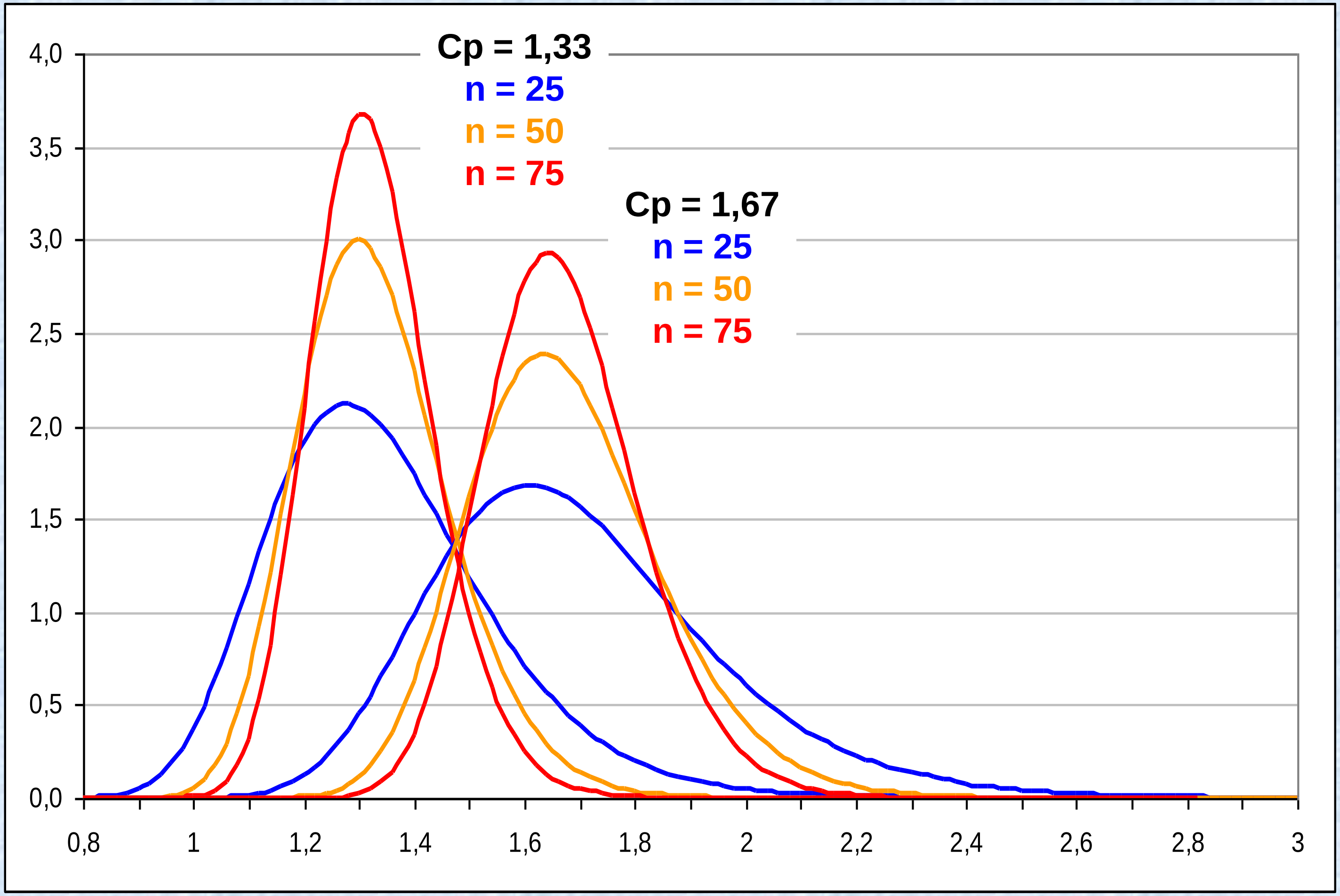
$$f_{\hat{C}_{pk}}(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{u} f_{\hat{C}_p}(u) f_{1-\hat{K}}\left(\frac{x}{u}\right) du \qquad \text{pro } x \leq 0.$$

Problém je v tom, že některé vzorce pro hustotu $f_{\hat{C}_{pk}}(\bullet)$ nelze vyjádřit explicitně, proto uvedeme jejich grafické vyjádření.

Ad 1) Např. pro $n = 50$, $C_p = 1{,}33$ jsou kvantily:

α	$C_{pk}(\alpha)$
0,01	1,059
0,025	1,094
0,05	1,126
0,5	1,320
0,95	1,577
0,975	1,635
0,99	1,708

Tvary hustoty odhadu $\hat{C}_{pk}$ pro případ odhadu s_n

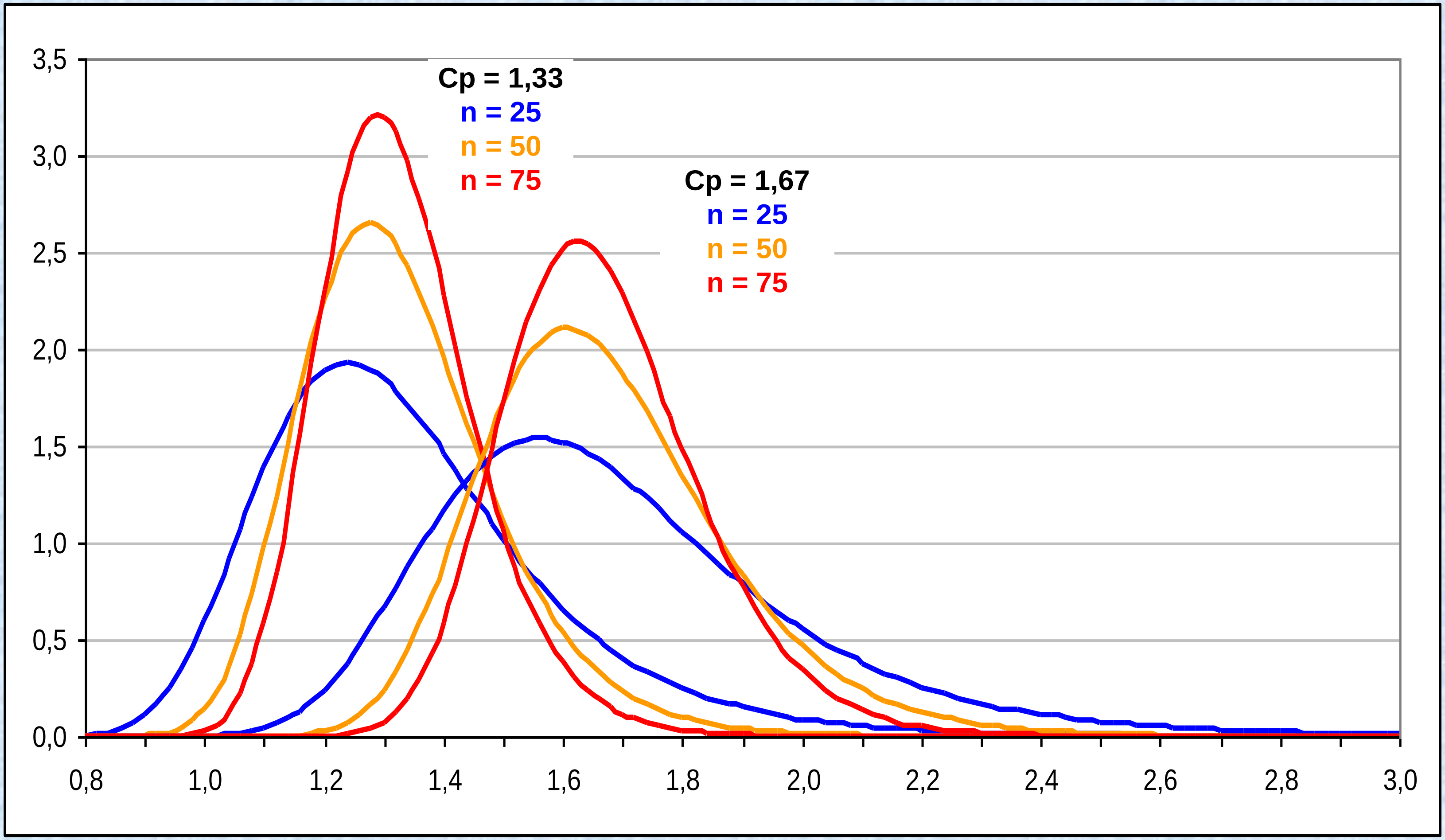


Poznámka: $\mu = 0$; $LSL = -1$; $USL = +1$

Ad 2) Např. pro $k = 10$, $n = 5$, $C_p = 1{,}33$ jsou kvantily:

α	$C_{pk}(\alpha)$
0,01	1,028
0,025	1,064
0,05	1,098
0,5	1,311
0,95	1,626
0,975	1,705
0,99	1,806

Tvary hustoty odhadu $\hat{C}_{pk}$ pro případ odhadu s_R

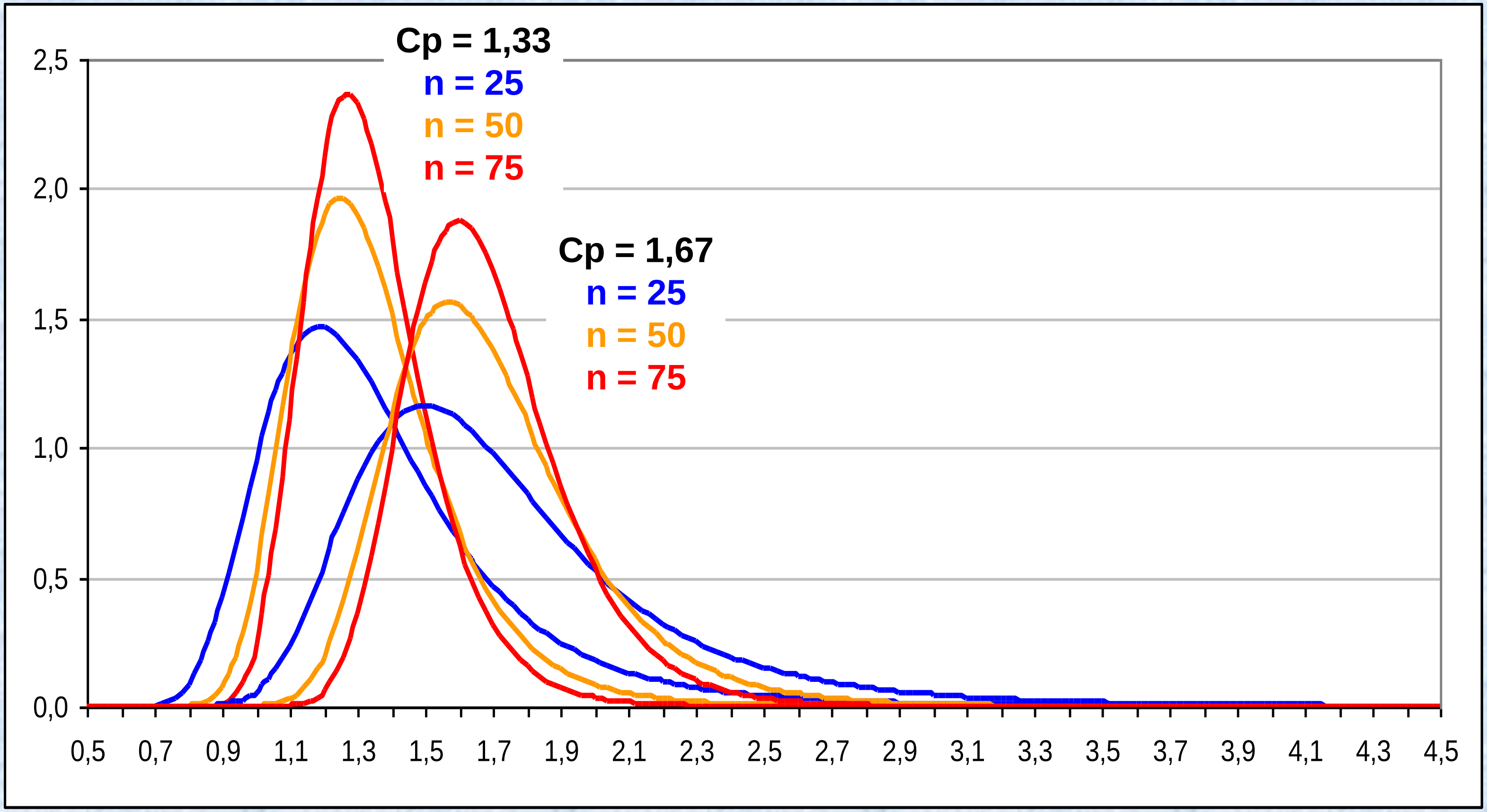


Poznámka: μ = 0; LSL = -1; USL = +1

Ad 3) Např. pro $k = 10$, $n = 5$, $C_p = 1{,}33$ jsou kvantily:

α	$C_{pk}(\alpha)$
0,01	0,951
0,025	0,994
0,05	1,034
0,5	1,311
0,95	1,790
0,975	1,924
0,99	2,108

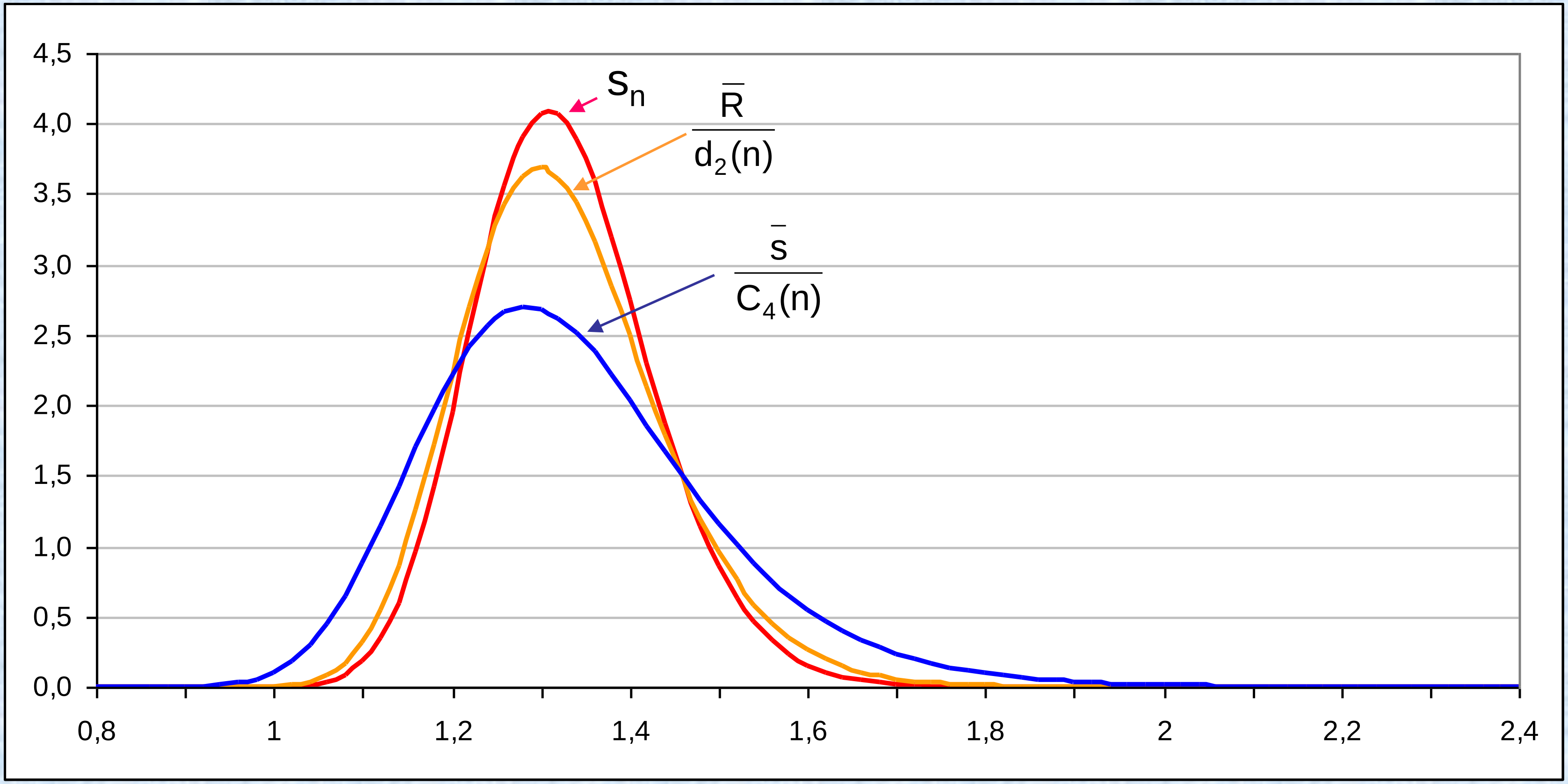
Tvary hustoty odhadu $\hat{C}_{pk}$ pro případ odhadu s_s



Poznámka: $\mu = 0$; LSL = -1; USL = +1

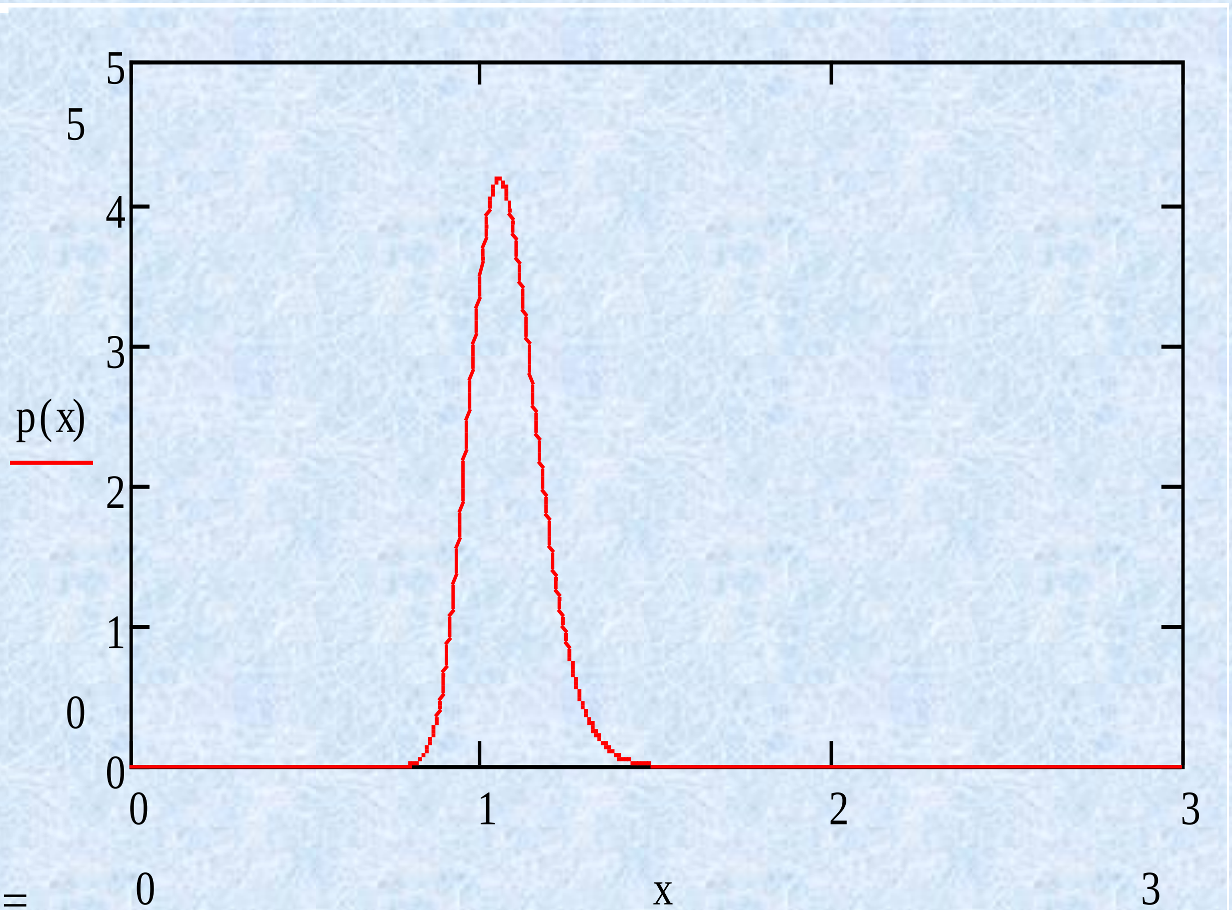
Tvary hustoty odhadu $\hat{C}_{pk}$ pro n = 5; k = 20; (tj. N = 100) a C_p = 1,33;

odhady s_n, $\dfrac{\overline{R}}{d_2(n)}$, $\dfrac{\overline{s}}{C_4(n)}$



Hustota psti pro odhad Cpk=1,064 při užití rozpětí R, k=25, n=4

Cpk=(1-K)Cp K=(μ-T)/Δ



1%-kvantil= 0,874

99%-kvantil= 1,342

Testování způsobilosti výrobního procesu

Nejjednodušší případ:

jednoduchá hypotéza $H : C_p = C_0$ (není způsobilý),

jednoduchá alternativa $A : C_p = C_1$ (je způsobilý),

budeme předpokládat, že $C_0 < C_1$, např. $C_0 = 1{,}33$, $C_1 = 1{,}67$.

Odhad ukazatele C_p je získán vždy ze stejného počtu měření, těchto úseků měření je k a předpokládáme, že jsou navzájem nezávislé a pocházejí z $N(\mu, \sigma^2)$.

V každém úseku měření je získán jeden odhad ukazatele C_p na základě odhadu směrodatné odchylky σ

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad ,$$

n je rozsah pozorování v každém úseku.

Vyjděme z tvaru hustoty rozdělení pro odhad $\hat{C}_p$:

$$f_{\hat{C}_p}(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{(n-1)C_p^2}{2x^2}} \frac{1}{x^n}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} C_0^{(n-1)}$$

(v rámci jednoho úseku).

Pak sdružená hustota (přes k úseků) má tvar

$$f_{\hat{C}_p}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} f_{\hat{C}_p}(x_i) \quad .$$

Test je odvozen od logaritmu věrohodnostního poměru

$$\ln \frac{f_{C_p}^{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_{C_p}^{H}(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad ,$$

který má explicitní tvar

(*) $$-\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i^2}\left(C_1^2 - C_0^2\right) + k\left(\frac{n-1}{2}\right)\ln\frac{C_1^2}{C_0^2} \quad .$$

Kritická oblast pro zamítnutí hypotézy H (na hladině významnosti α) má tvar:

$$-\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i^2}\left(C_1^2 - C_0^2\right) + k\left(\frac{n-1}{2}\right)\ln\frac{C_1^2}{C_0^2} > k_\alpha \quad ,$$

kde k_α je (1-α)% - ní kvantil rozdělení testové statistiky (*) při platnosti hypotézy H .

Lze snadno upravit na tvar:

$$\frac{k(n-1)}{2}\ln\frac{C_1^2}{C_0^2} - k_\alpha > \frac{n-1}{2}\left(C_1^2 - C_0^2\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i^2} \quad .$$

Protože $\hat{C}_i^2 = C_p^2 \cdot \dfrac{\sigma^2}{s_i^2}$ pak nerovnost lze vyjádřit jako

$$\frac{k(n-1)}{2}\ln\frac{C_1^2}{C_0^2} - k_\alpha > \frac{n-1}{2}\left(C_1^2 - C_0^2\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{s_i^2}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{C_0^2} \quad .$$

Tudíž

$$\frac{-C_0^2}{C_1^2 - C_0^2}\left[k(n-1)\ln\frac{C_1^2}{C_0^2} - 2k_\alpha \right] > \sum_{i=1}^{k}(n-1)\frac{s_i^2}{\sigma^2} \quad .$$

Za předpokladu normality má veličina na pravé straně nerovnosti $\chi^2(k(n-1))$ rozdělení. Tedy hypotéza H se zamítá na hladině významnosti α , když

$$\sum_{i=1}^{k}(n-1)\frac{s_i^2}{\sigma^2} < q_\alpha(k(n-1)) \quad ,$$

kde $q_\alpha(k(n-1))$ je α%-ní kvantil $\chi^2(k(n-1))$ rozdělení, které jsou tabelovány.

Odtud ihned

$$k_\alpha = \frac{1}{2}\left[k(n-1)\ln\frac{C_1^2}{C_0^2} - \frac{C_1^2 - C_0^2}{C_0^2} q_\alpha(k(n-1)) \right] .$$

Finální tvar kritické oblasti:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{k}\frac{C_0^2}{\left(\hat{C}_p\right)_i^2} < q_\alpha(k(n-1)) \ ,$$

kde $\left(\hat{C}_p\right)_i$ je odhad koeficientu C_p z i-tého úseku.

Nejobvyklejší případ je k = 1.

Hypotéza H se na základě n měření znaku jakosti zamítá na hladině významnosti α , když

$$(n-1)\frac{C_0^2}{\hat{C}_p^2} < q_\alpha(n-1) \ ,$$

neboli

$$\hat{C}_p > C_0\sqrt{\frac{n-1}{q_\alpha(n-1)}} \ .$$

Např. při $\alpha = 0{,}05$ a $n = 50$ se hypotéza $H : C_p = C_0$ zamítá, když

$$\hat{C}_p > C_0\sqrt{\frac{49}{33{,}93}} = C_0 \cdot 1{,}2017$$

při C_0 = 1,33 máme právo hypotézu H zamítnout, když $\hat{C}_p > 1{,}5983$.

Co z toho plyne ?

1. Kritická oblast nezávisí na C_1 , tzn. že je stejná pro všechny hodnoty $C_p > C_0$. Tím vlastně testujeme jednoduchou hypotézu $H: C_p = C_0$ proti složené alternativní hypotéze $A: C_p > C_0$.

2. I když bude naměřená hodnota $\hat{C}_p \leq C_0 \sqrt{\dfrac{n-1}{q_\alpha(n-1)}}$

a hypotézu $H: C_p = C_0$ tím nezamítáme, neznamená to, že hypotéza $C_p = C_0$ musí již platit. Bude-li např. $C_0 = 1{,}33$, $\hat{C}_p = 1{,}45$, $n = 50$, $\alpha = 0{,}05$, pak je sice $\hat{C}_p = 1{,}45 \leq 1{,}5983$ a hypotézu nezamítáme, ale na základě týchž dat nezamítáme ani hypotézu např. $H': C_0 = 1{,}25$, protože

$$1{,}45 \leq 1{,}25 \sqrt{\frac{49}{33{,}93}} = 1{,}5022.$$

3. V praxi se při požadavku na C_p, např. $C_p = 1{,}33$ požaduje, aby $\hat{C}_p \geq 1{,}33$. Z předchozího je vidět, že tento požadavek nám nezaručuje, že skutečně $C_p = 1{,}33$. Teprve hodnota větší nežli

$$C_0 \sqrt{\frac{n-1}{q_\alpha(n-1)}}$$

nám zaručuje zamítnutím hypotézy Cp = 1,33 (ale opět ne 100%-ně), že $C_p > C_0$ a lze pak tvrdit, že proces má způsobilost větší nežli je hodnota koeficientu Cp při nulové hypotéze.

Jaké máme záruky při zamítnutí hypotézy ?

H: $C_p = C_0$?

Míra záruky je dána počtem pozorování. Čím více pozorování (čím větší n), tím je větší záruka, že hypotézu zamítneme, když skutečně neplatí (souvisí s tzv. silou testu $1-\beta$, kde β je tzv. pravděpodobnost chyby 2. druhu, se kterou hypotézu H nezamítneme, i když tato neplatí).

Na druhou stranu každý test je spojen i s tzv. pravděpodobností chyby 1. druhu α (hladina významnosti), se kterou je hypotéza $H : C_p = C_0$ zamítá, i když tato platí.

Tedy s pravděpodobností $1-\alpha$ se očekává, že pokud proces je na úrovni $C_p = C_0$, tento stav bude na základě měření detekován.

Síla testu $1-\beta$ bude vyjadřovat přání zákazníka, aby test s touto pravděpodobností detekoval stav procesu, např. při hodnotě $C_p = C_1$, kde samozřejmě $C_1 > C_0$ (tedy např. při $C_0 = 1{,}33$ a $C_1 = 1{,}67$). Jinými slovy, když skutečně bude proces na úrovni $C_p = C_1$, aby tato úroveň byla zamítnuta s pravděpodobností β.

Jak toho dosáhnout ?

Odpověď:

Zaručením minimálního počtu pozorování.

Máme určeno: C_0, C_1, α, β. Jaký má být počet pozorování n, aby test hypotézy $H: C_p = C_0$ proti alternativní hypotéze $A: C_p > C_0$ toto splňoval ?

Pravděpodobnost chyby 1. druhu vyjadřuje požadavek, aby

$$P\left\{\hat{C}_p > C_0 \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}} \;\middle|\; C_p = C_0\right\} = \alpha$$

a současně chceme, aby síla testu byla $1-\beta$, tj. aby,

$$P\left\{\hat{C}_p \le C_1 \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\beta}(n-1)}} \;\middle|\; C_p = C_1\right\} = \beta \ .$$

Z toho plyne, že musí platit nerovnost

$$C_0 \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}} \leq C_1 \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\beta}(n-1)}} \quad ,$$

čili v krajním případě

$$\frac{C_1}{C_0} = \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\beta}(n-1)}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}} \quad .$$

Z tohoto vztahu lze určit požadovaný počet pozorování n .

Při volbě $\alpha = \beta$ je minimální počet pozorování určen jednoznačně:

Tabulka 1.

n	$\alpha = \beta =$ 0,05 C_1 / C_0	$\alpha = \beta =$ 0,01 C_1 / C_0
10	2,25	3,22
20	1,73	2,17
30	1,55	1,87
40	1,46	1,71
50	1,40	1,61
60	1,36	1,54
70	1,33	1,49
80	1,30	1,45
90	1,28	1,42

n	$\alpha = \beta =$ 0,05 C_1 / C_0	$\alpha = \beta =$ 0,01 C_1 / C_0
100	1,26	1,39
120	1,24	1,35
140	1,22	1,32
160	1,20	1,30
180	1,19	1,28
200	1,17	1,26

Tabulka 2.

n	$\alpha = \beta =$ 0,05 C_p / C_0	$\alpha = \beta =$ 0,01 C_p / C_0
10	1,645	2,08
20	1,37	1,58
30	1,28	1,43
40	1,23	1,35
50	1,20	1,30
60	1,18	1,27
70	1,165	1,24
80	1,15	1,22
90	1,14	1,21
100	1,13	1,20

n	$\alpha = \beta =$ 0,05 C_p / C_0	$\alpha = \beta =$ 0,01 C_p / C_0
120	1,12	1,175
140	1,11	1,16
160	1,10	1,15
180	1,095	1,14
200	1,09	1,13

Příklad.

Pokud chceme zajistit, aby náš proces splňoval požadavek $C_p > C_0 = 1{,}33$ na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ a se silou testu $1\text{-}\beta = 0{,}95$ při $C_1 = 1{,}67$, je nutné vzít nejméně (*viz. Tabulka 1*.)

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{1{,}67}{1{,}33} \cong 1{,}26 \ ,$$

čemuž odpovídá $n = 100$ pozorování a hypotéza $H\colon\ C_p = 1{,}33$ se zamítá na hladině významnost 0,05, pokud naměřená hodnota překročí hranici (*viz Tabulka 2*.)

$$\hat{C}_p \geq 1{,}33 \cdot 1{,}13 = 1{,}5029.$$

Teprve pak lze garantovat téměř s jistotou, že skutečně způsobilost tohoto procesu je větší nežli 1,33.

Lze postupovat při testování způsobilosti výrobního procesu i naopak, totiž tím způsobem, že přehodíme roli hypotézy a alternativy z předchozí analýzy.

Opět vyjdeme z jednoduché hypotézy H: $C_p = C_1$, proti jednoduché alternativě A: $C_p = C_0$, kde nyní ale $C_1 > C_0$. Tedy hypotéza vyjadřuje způsobilost procesu, ale alternativa jeho nezpůsobilost. Obdobným způsobem jako při předchozím testování pomocí věrohodnostního poměru dospějeme k následujícímu tvaru kritické oblasti:

Hypotéza o způsobilosti na úrovni C1 se zamítá, když

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{C_1^2}{(\hat{C}_p)_i^2} > \frac{q_{1-\alpha}(k(n-1))}{n-1} \quad ,$$

kde $(\hat{C}_p)_i$ je odhad koeficientu C_p z i-tého úseku, n je rozsah pozorování v každém úseku, α je kladina významnosti testu a $q_{1-\alpha}(k(n-1))$ je $(1-\alpha)$ % - ní kvantil $\chi^2(k(n-1))$ rozdělení.

Opět v praxi bývá nejčastější případ s k = 1 , pak hypotéza H: $C_p = C_1$ se zamítá na hladině významnosti α , když:

$$\hat{C}_p < C_1 \sqrt{\frac{n-1}{q_{1-\alpha}(n-1)}} \quad .$$

Proces tedy lze považovat za způsobilý na úrovni $C_p = C_1$, když bude platit opačná nerovnost:

$$\hat{C}_p \geq C_1 \sqrt{\frac{n-1}{q_{1-\alpha}(n-1)}} \quad .$$

Např. při n = 50 , α = 0,05 to znamená, že při C_1 = 1,33 musíme odhad $\hat{C}_p$ dostat nad mez

$$\hat{C}_p \geq 1{,}33 \sqrt{\frac{49}{66{,}34}} \cong 1{,}143 \ .$$

Při C_1 = 1,67 nemáme důvod hypotézu o způsobilosti zamítnout (při n = 50, α = 0,05), když bude

$$\hat{C}_p \geq 1{,}435 \ .$$

Opět je nutné zdůraznit, že tvar kritické oblasti nezávisí na hodnotě C_0 v alternativě, tudíž tento test lze současně pokládat za test jednoduché hypotézy H: $C_p = C_1$, proti složené alternativě A: $C_p < C_1$.

Tento postup při testování způsobilosti výrobního procesu by se měl provádět v praxi, neboť pokud je proces na úrovni způsobilosti $C_p = C_1$, pak hodnoty odhadů $\hat{C}_p$ kolísají kolem této hodnoty s jistou mírou variability, která je především odvislá od počtu pozorování, z nichž se odhad $\hat{C}_p$ počítá.

Závěr.

Kdy a jak vůbec hodnotit způsobilost procesu ?

1. Sledovaný znak jakosti musí být popsatelný normálním rozdělením.
2. Proces musí být statisticky zvládnutý, tedy stabilizovaný a hlídaný pomocí regulačních diagramů.
3. Musí být stanoveno, kolik pozorování budeme používat pro výpočet odhadu $\hat{C}_p$.
4. Musí být stanoveno, jak často budeme způsobilost odhadovat.
5. Používat statistické testy pro hodnocení způsobilosti, protože pouhé splnění požadavku $\hat{C}_p \geq C_0$ (požadovaná úroveň) nestačí pro garanci této úrovně.

UKAZATELE VÝKONNOSTI

Má smysl za předpokladu: • normální rozdělení N(μ , σ^2) sledovaného znaku jakosti;

• jeden náhodný výběr rozsahu N .

$$\boxed{P_p = \frac{USL - LSL}{6\,\sigma_{tot}}}$$

$$\sigma_{tot} \approx s_{tot} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}_{tot}\right)^2}$$

$$\mu \approx \bar{x}_{tot} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Celková směrodatná odchylka s_{tot} charakterizuje celkovou variabilitu ve výběru N pozorování (pokud je výběr rozdělen do k podskupin stejného rozsahu n je N = k*n).

UKAZATELE VÝKONNOSTI

Nepředpokládá se :
- normální rozdělení sledovaného znaku jakosti.
- Uvažuje se jeden náhodný výběr rozsahu N.

$$P_p = \frac{USL - LSL}{U_p - L_p}$$

U_p je 99,865 % -ní kvantil

L_p je 0,135 % -ní kvantil

Jedná se o kvantily aktuálního rozdělení sledované jakostní vlastnosti.
Tyto kvantily odpovídají $\mu \pm 3\sigma$ u normálního rozdělení N(μ , σ).

$$P_{pk} = \min\left\{ \frac{USL - Me}{U_p - Me}, \frac{Me - LSL}{Me - L_p} \right\}$$

Me je medián

$$P_{pM} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left[(U_p - L_p)/6\right]^2 + (Me - T)^2}}$$

$$P_{pk} = \min\left\{\frac{USL-\mu}{3\sigma_{tot}}, \frac{\mu-LSL}{3\sigma_{tot}}\right\}$$

$$\sigma_{tot} \approx s_{tot} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar{x}_{tot}\right)^2}$$

$$\mu \approx \bar{x}_{tot} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

UKAZATELE VÝKONNOSTI VYCHÁZEJÍ Z CELKOVÉ VARIABILITY PROCESU ZA DELŠÍ OBDOBÍ

UKAZATEL VÝKONNOSTI $\mathbf{P_p}$

nepřihlíží k otázce centrování procesu.
Charakterizuje

ČEHO JSME SCHOPNI DLOUHODOBĚ V PROCESU DOSÁHNOUT

UKAZATEL VÝKONNOSTI $\mathbf{P_{pk}}$

přihlíží k dosaženému stupni centrování procesu.
Charakterizuje

ČEHO JSME SKUTEČNĚ DLOUHODOBĚ V PROCESU DOSÁHLI