Národní informační středisko pro podporu jakosti

Konzultační středisko statistických metod při NIS-PJ

Analýza způsobilosti

Ing. Vratislav Horálek, DrSc.

předseda TNK 4: Aplikace statistických metod

Ing. Josef Křepela

ČSJ

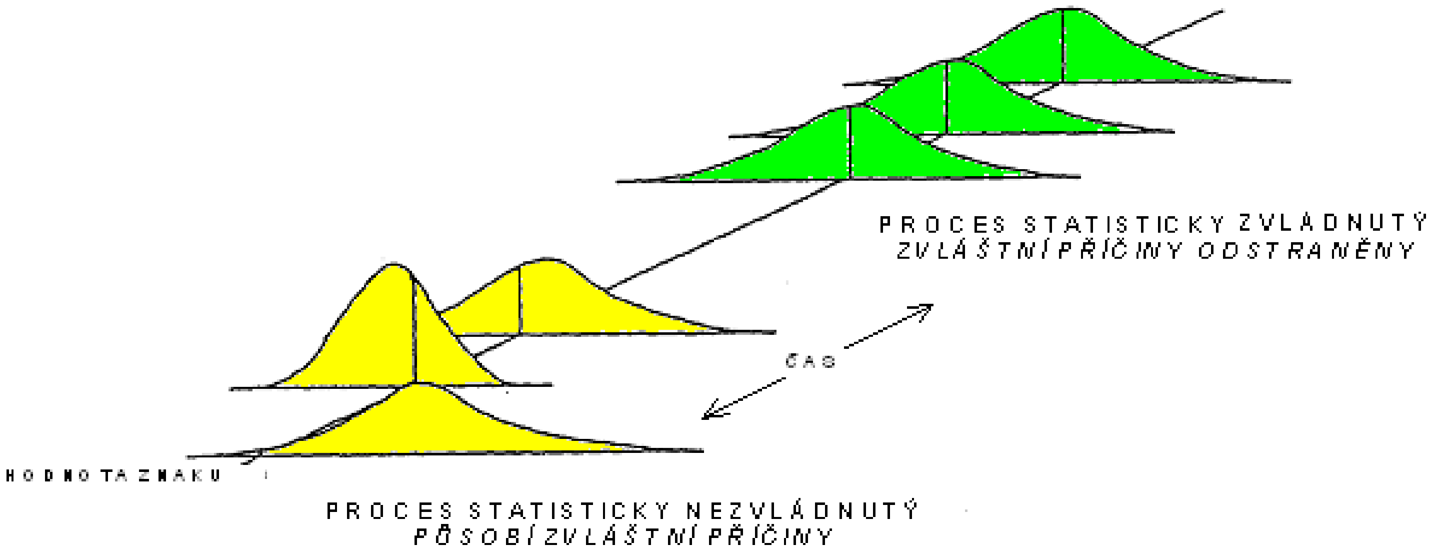
16. června 2005.

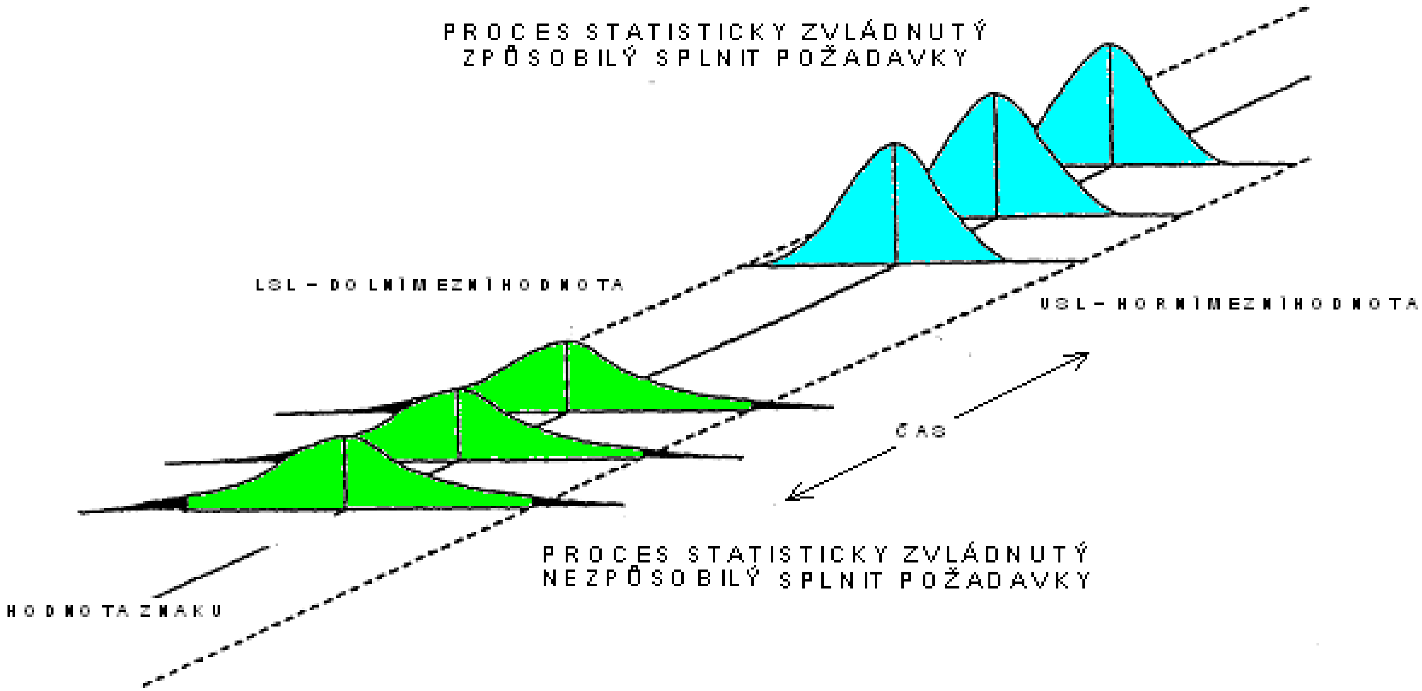
Způsobilost procesu

udává vztah mezi ***přirozeným kolísáním***, které pramení z náhodných příčin a ***technickým zadáním***. Představuje nejlepší výkon samotného procesu, pracujícího ve stavu statisticky zvládnutém .

Proces může být uveden do ***stavu statisticky zvládnutého*** až po detekci a odstranění zvláštních příčin. Teprve pak je jeho výkon předvídatelný a má být kvantifikována jeho způsobilost.

ŘÍZENÍ PROCESU





Analýza způsobilosti:

krátkodobá – založená na měřeních získaných z jediného provozního cyklu a určené pouze k ověření, že proces může pracovat ve statisticky zvládnutém stavu;

dlouhodobá – založená na měřeních uskutečněných po delší časové období a tím zohledňující variabilitu procesu v čase.

UKAZATELE ZPŮSOBILOSTI

Předpokládá se : • normální rozdělení N(μ , σ) sledovaného znaku jakosti;
• k podskupin stejného rozsahu n jednotek (k*n = N).

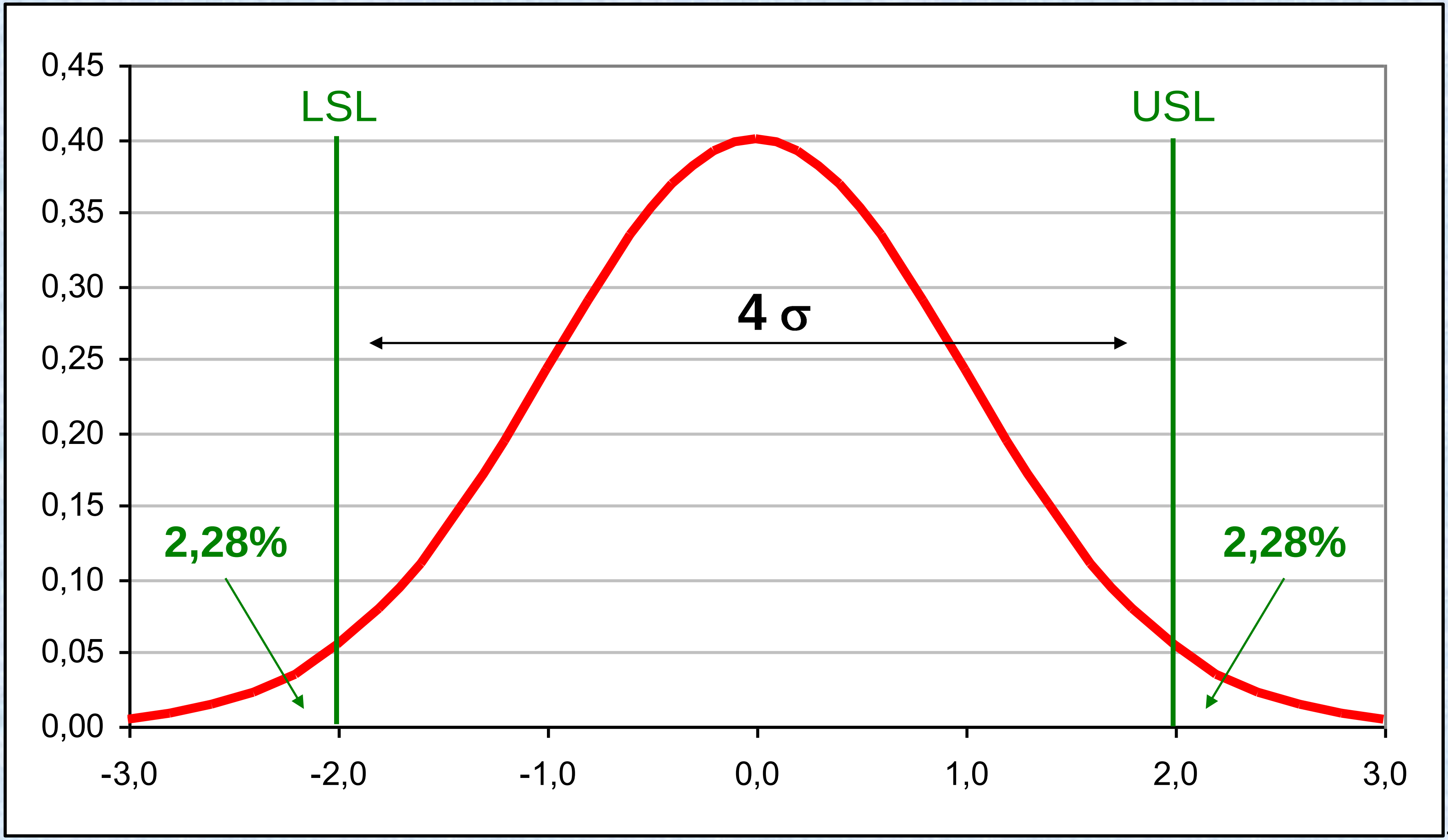
$$\boxed{C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}}$$

$$\sigma \approx s = \overline{R}/d_2 \quad ; \quad \overline{s}/C_4 \; ; \qquad \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j^2}$$

Průměrná směrodatná odchylka s charakterizuje variabilitu uvnitř k podskupin stejného rozsahu n . Rozptyl $s_j^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_j)^2$ pro j = 1, 2, ..., k je rozptylem j-té podskupiny a $\overline{s} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j$ je průměrná směrodatná odchylka v k podskupinách. $\overline{R} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} R_j$ je průměrné rozpětí v k podskupinách.

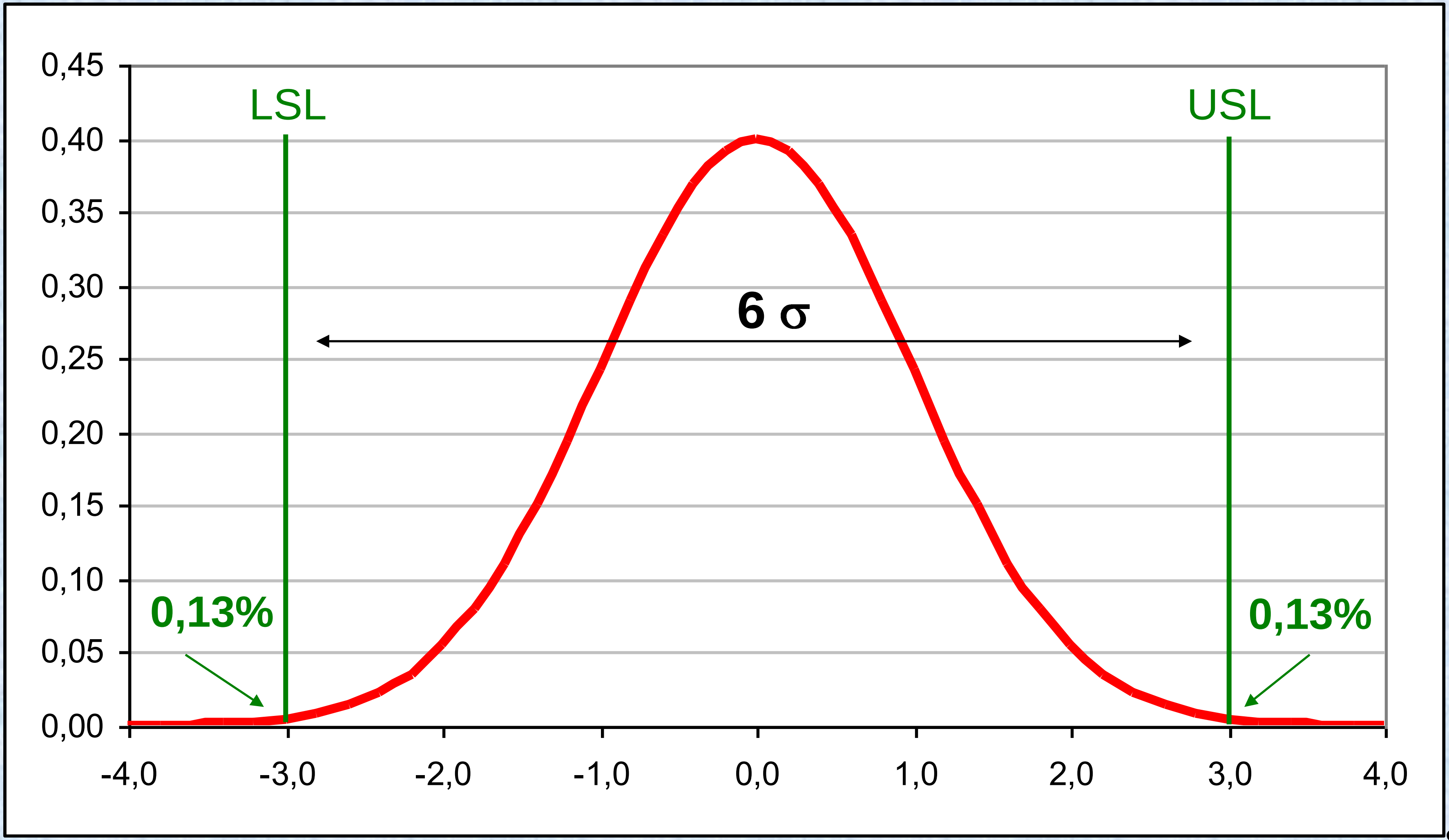
$C_p < 1$ - proces není způsobilý

$(USL - LSL) = 4\,\sigma$; $C_p = 0{,}67$



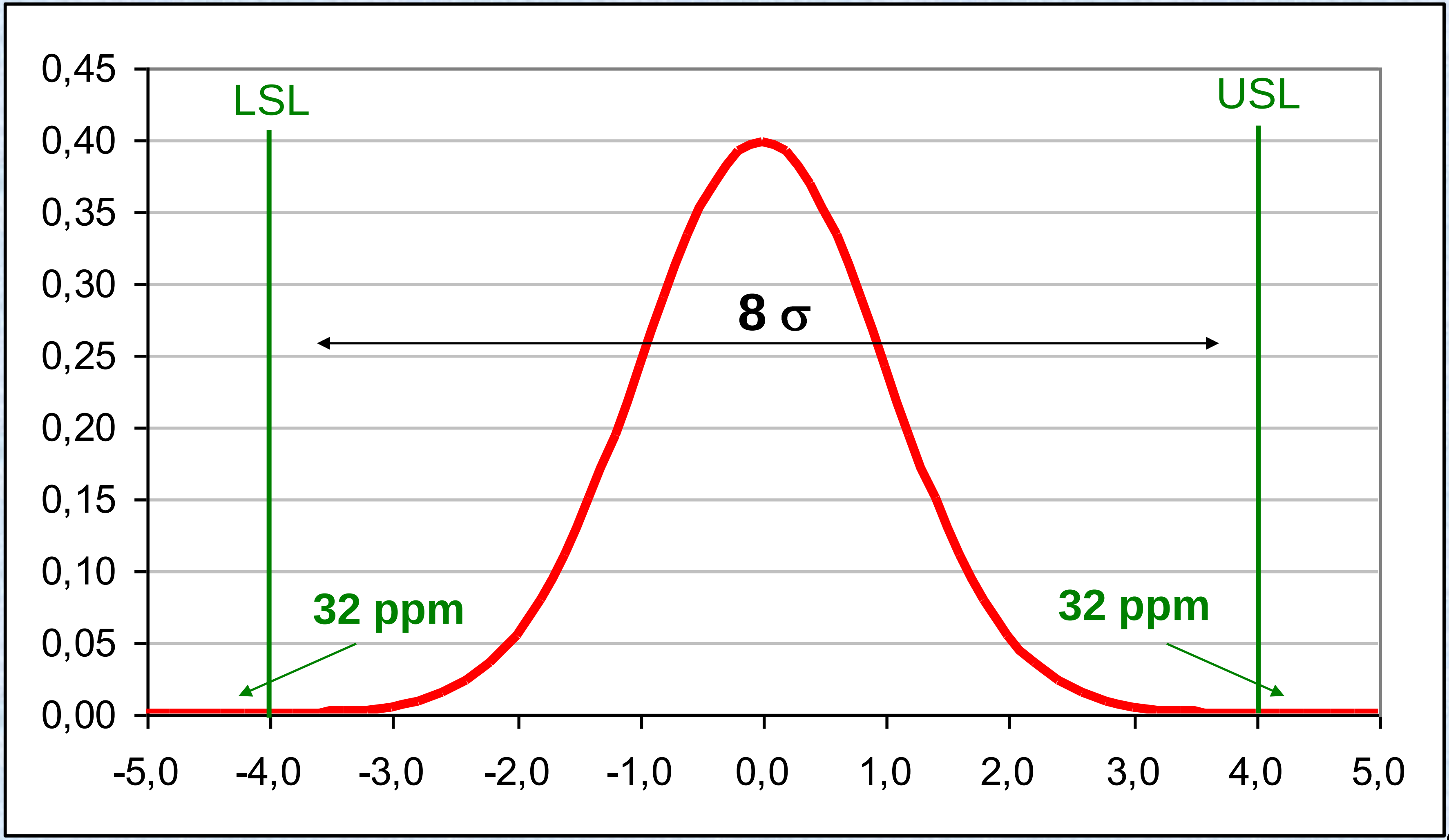
C_p = 1 - proces je blízký způsobilosti

(USL - LSL) = 6 σ; C_p = 1,0



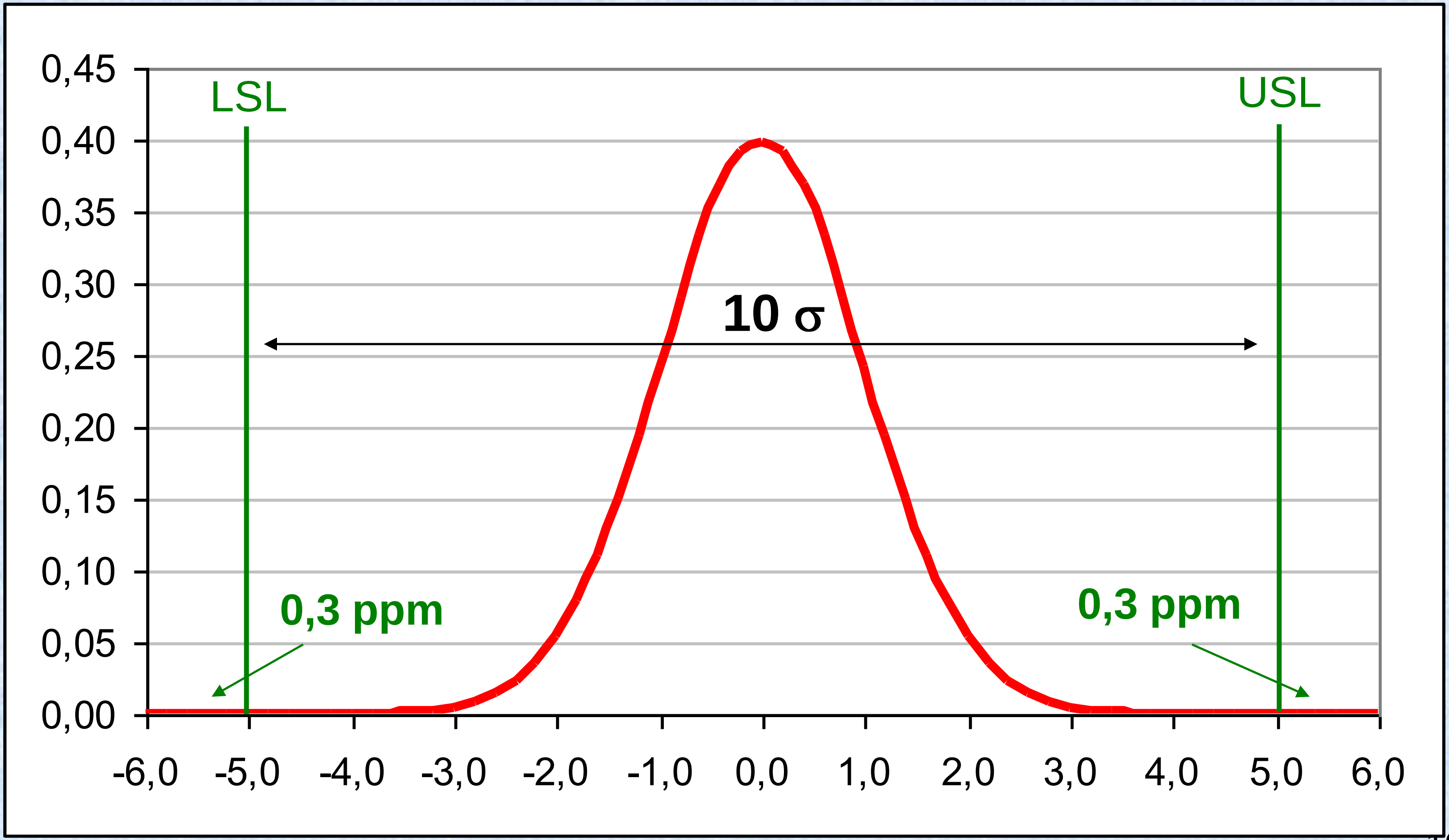
$C_p \geq 1{,}33$ - proces je způsobilý

$(USL - LSL) = 8\sigma; \quad C_p = 1{,}33$



$C_p \geq$ 1,67 - proces je způsobilý

(USL - LSL) = 10 σ , C_p = 1,67



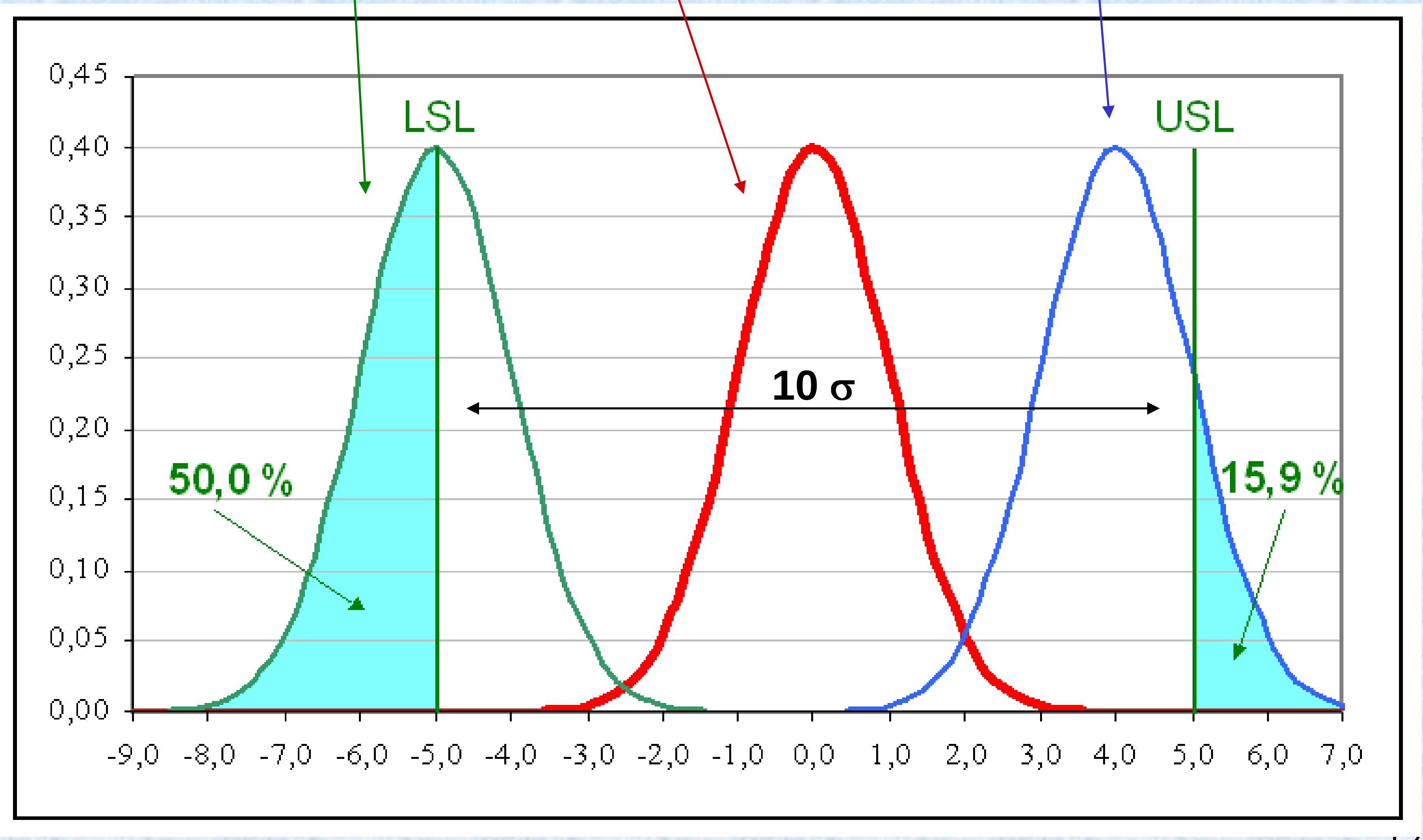
$$C_{pk} = \min\left\{\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right\}$$

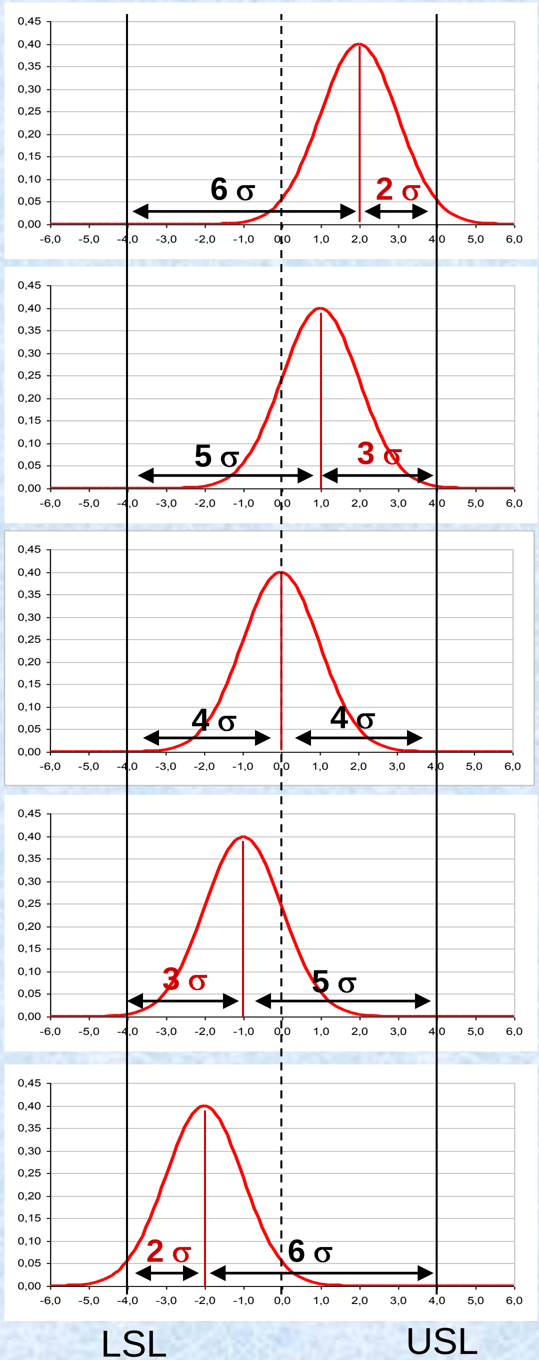
$$\sigma \approx s = \overline{R}/d_2 \quad ; \quad \overline{s}/C_4 \ ; \qquad \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j^2}$$

$$\mu \approx \overline{\overline{x}} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \overline{x}_j$$

C_p = 1,67 - způsobilé procesy, špatně centrované

C_{pk} = 0 ; C_{pk} = 1,67 ; C_{pk} = 0,33





μ	C_p	C_{pL}	C_{pU}
2	1,33	2,00	**0,66**
1	1,33	1,67	**1,00**
0	1,33	1,33	1,33
- 1	1,33	**1,00**	1,67
- 2	1,33	**0,66**	2,00

UKAZATEL ZPŮSOBILOSTI C_p

nepřihlíží k otázce centrování procesu.

Charakterizuje pouze

ČEHO JSME SCHOPNI DOSÁHNOUT

UKAZATEL ZPŮSOBILOSTI C_{pk}

přihlíží k dosaženému stupni centrování procesu.

Charakterizuje

ČEHO JSME SKUTEČNĚ DOSÁHLI

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sigma_T}$$

$$\sigma_T \approx s_T = \sqrt{\bar{s}^2 + \left(\bar{\bar{x}} - T\right)^2}$$

T je cílová hodnota

$$\bar{s} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j$$

$$\mu \approx \bar{\bar{x}} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j$$

UKAZATELE VÝKONNOSTI

Předpokládá se :

- normální rozdělení N(μ , σ) sledovaného znaku jakosti;
- jeden náhodný výběr rozsahu N .

$$\boxed{P_p = \frac{USL - LSL}{6\,\sigma_{tot}}}$$

$$\sigma_{tot} \approx s_{tot} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}_{tot}\right)^2}$$

$$\mu \approx \bar{x}_{tot} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Celková směrodatná odchylka s_{tot} charakterizuje celkovou variabilitu ve výběru N pozorování (pokud je výběr rozdělen do k podskupin stejného rozsahu n je N = k*n).

$$P_{pk} = \min\left\{\frac{USL-\mu}{3\sigma_{tot}}, \frac{\mu-LSL}{3\sigma_{tot}}\right\}$$

$$\sigma_{tot} \approx s_{tot} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}_{tot}\right)^2}$$

$$\mu \approx \bar{x}_{tot} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$P_{pM} = \frac{USL - LSL}{6\,\sigma_{Ttot}}$$

$$\sigma_{Ttot} \approx s_{Ttot} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - T)^2}$$

Platí

$$s_{Ttot} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}_{tot}\right)^2 + \left(\bar{x}_{tot} - T\right)^2} = \sqrt{s_{tot}^2 + \left(\bar{x}_{tot} - T\right)^2}$$

s_{Ttot} vyjadřuje celkovou variabilitu okolo cílové hodnoty T.

Nepředpokládá se :

normální rozdělení sledovaného znaku jakosti.

Uvažuje se

jeden náhodný výběr rozsahu N.

$$\boxed{P_p = \frac{USL - LSL}{U_p - L_p}}$$

U_p je 99,865 % -ní kvantil

L_p je 0,135 % -ní kvantil

Jedná se o kvantily aktuálního rozdělení sledované jakostní vlastnosti.
Tyto kvantily odpovídají $\mu \pm 3\sigma$ u normálního rozdělení N(μ , σ).

$$P_{pk} = \min\left\{ \frac{USL - Me}{U_p - Me}, \frac{Me - LSL}{Me - L_p} \right\}$$

Me je medián

$$P_{pM} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left[(U_p - L_p)/6\right]^2 + (Me - T)^2}}$$

UKAZATELE VÝKONNOSTI VYCHÁZEJÍ Z CELKOVÉ VARIABILITY PROCESU ZA DELŠÍ OBDOBÍ

UKAZATEL VÝKONNOSTI $\mathbf{P_p}$

nepřihlíží k otázce centrování procesu. Charakterizuje

ČEHO JSME SCHOPNI DLOUHODOBĚ V PROCESU DOSÁHNOUT

UKAZATEL VÝKONNOSTI $\mathbf{P_{pk}}$

přihlíží k dosaženému stupni centrování procesu. Charakterizuje

ČEHO JSME SKUTEČNĚ DLOUHODOBĚ V PROCESU DOSÁHLI

Všechny vypočtené hodnoty ukazatelů způsobilosti i výkonnosti jsou statistikami (náhodnými veličinami), vykazují variabilitu a je pro ně možno stanovit rozdělení pravděpodobnosti a tedy i konfidenční intervaly.

Odhady ukazatelů způsobilosti

1) Ukazatel **C_p** odhadujeme na základě k podskupin stejného rozsahu n, ze kterých vypočteme odhad směrodatné odchylky na základě jednoho ze vztahů

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j^2} \quad ; \quad \hat{\sigma} = \bar{R}/d_2(n) \quad ; \quad \hat{\sigma} = \bar{s}/C_4(n),$$

potom vypočteme

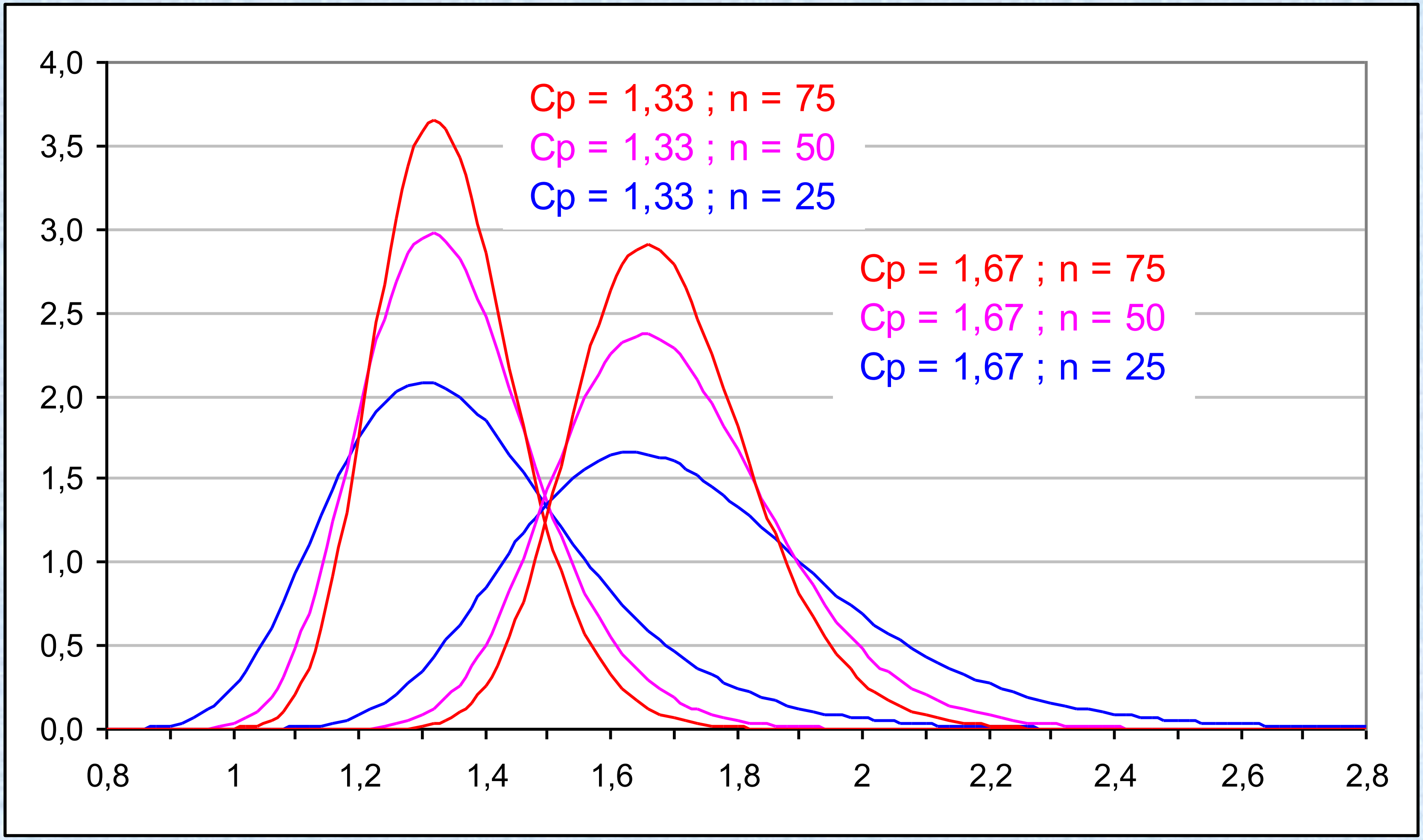
$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} \quad .$$

$\hat{C}_p$ je náhodná veličina. Konfidenční interval pro C_p na konfidenční úrovni $(1 - 2\alpha)$ je dán přibližně výrazem

$$\boxed{\sqrt{\chi^2_{\alpha}(\nu)/\nu}\;\hat{C}_p \quad < \quad C_p \quad < \quad \sqrt{\chi^2_{1-\alpha}(\nu)/\nu}\;\hat{C}_p}$$

$\chi^2_{\alpha}(\nu)$ a $\chi^2_{1-\alpha}(\nu)$ jsou α a $(1-\alpha)$ kvantily rozdělení pro počet stupňů volnosti $\nu = k\,(n - 1)$.

Rozdělení pravděpodobnosti odhadů $\hat{C}_p$



PŘÍKLAD:

a) Dáno: USL = 22,5 ; LSL = 21,5 . Z k = 25 podskupin rozsahu n = 5 jednotek byl vypočten odhad $\hat{\sigma}$ = 0,11 .

Potom

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = 1 / 6*0{,}11 = \mathbf{1{,}515}$$

a konfidenční interval, pro konfidenční úroveň $(1 - 2\alpha) = 0{,}95$; počet stupňů volnosti $\nu = k(n - 1) = 100$ je

$$\mathbf{1{,}305} < C_p < \mathbf{1{,}724} \ .$$

Tento interval pokryje skutečnou hodnotu C_p s pravděpodobností 0,95.

Pro danou hodnotu C_p můžeme stanovit interval (statistický pokryvný interval), ve kterém se budou s pravděpodobností $(1 - 2\alpha)$ vyskytovat odhady $\hat{C}_p$ (Tento interval lze snadno odvodit z výrazu pro konfidenční interval).

PŘÍKLAD:

b) Pro teoretickou hodnotu (parametr) $C_p = 1{,}33$ v základním souboru, se budou vyskytovat odhady $\hat{C}_p$, počítané z $k = 20$ podskupin rozsahu $n = 3$, s pravděpodobností $(1 - 2\alpha) = 0{,}98$ v intervalu

$$\mathbf{1{,}054} < \hat{C}_p < \mathbf{1{,}787}\,.$$

PŘÍKLAD:

c) Dáno k = 1; n = 60; 100; 200; 500 a $(1-2\alpha) = 0{,}95$.

Stanovíme pro čtyři hodnoty odhadů dolní (první sloupec) a horní (druhý sloupec) mez konfidenčního intervalu pro parametr C_p :

n	$\hat{C}_p = 1{,}00$		$\hat{C}_p = 1{,}33$		$\hat{C}_p = 1{,}67$		$\hat{C}_p = 2{,}00$	
60	0,820	1,180	1,091	1,569	1,369	1,971	1,640	2,360
100	0,861	1,139	1,145	1,515	1,438	1,902	1,722	2,278
200	0,902	1,098	1,200	1,460	1,506	1,834	1,804	2,196
500	0,937	1,063	1,246	1,414	1,565	1,775	1,874	2,126

2) Ukazatel **C_{pk}** odhadujeme na základě k podskupin stejného rozsahu n, ze kterých vypočteme výběrové průměry $\bar{x}_j$ (j = 1, …, k) a průměr průměrů podskupin $\bar{\bar{x}}$, potom odhad parametru μ je

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j$$

a odhad směrodatné odchylky $\hat{\sigma}$ na základě jednoho ze vztahů

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j^2} \quad ; \quad \hat{\sigma} = \bar{R}/d_2(n) \quad ; \quad \hat{\sigma} = \bar{s}/C_4(n) \quad ,$$

potom vypočteme

$$\hat{C}_{pk} = \min\left\{\frac{USL - \hat{\mu}}{3\hat{\sigma}}, \frac{\hat{\mu} - LSL}{3\hat{\sigma}}\right\}$$

$\hat{C}_{pk}$ je náhodná veličina. Konfidenční interval pro C_{pk} na konfidenční úrovni $(1 - 2\alpha)$ je dán přibližně výrazem

$$\boxed{\hat{C}_{pk}\left(1 + \frac{u_{\alpha}}{\sqrt{2\nu}}\right) < C_{pk} < \hat{C}_{pk}\left(1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{2\nu}}\right)}$$

u_{α} a $u_{1-\alpha}$ jsou α a $(1-\alpha)$ kvantily rozdělení pro počet stupňů volnosti $\nu = k(n - 1)$.

PŘÍKLAD:

a) Dáno: LSL = 21,5 ; USL = 22,5 . Z k = 25 podskupin rozsahu n = 5 jednotek byl vypočten odhad $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} =$ 22,1 a $\hat{\sigma}$ = 0,11 . Potom

$$\hat{C}_{pk} = \min\left\{\frac{USL - \hat{\mu}}{3\hat{\sigma}} ; \frac{\hat{\mu} - LSL}{3\hat{\sigma}}\right\} = \min\{1{,}212 ; 1{,}818\} = 1{,}212.$$

Konfidenční interval, pro konfidenční úroveň $(1 - 2\alpha) = 0{,}95$, počet stupňů volnosti $\nu = k\,(n - 1) = 100$; $u_{0,025} = -1{,}96$ a $u_{0,975} = 1{,}96$ je

$$\mathbf{1{,}044} < C_{pk} < \mathbf{1{,}380}\ .$$

Tento interval pokryje skutečnou hodnotu C_{pk} s pravděpodobností 0,95.

Pro danou hodnotu C_{pk} můžeme opět stanovit interval (statistický pokryvný interval), ve kterém se budou s pravděpodobností $(1 - 2\alpha)$ vyskytovat odhady $\hat{C}_{pk}$.

PŘÍKLAD:

b) Pro $C_{pk} = 1{,}33$ v základním souboru se budou vyskytovat odhady $\hat{C}_{pk}$ počítané z $k = 20$ podskupin rozsahu $n = 3$ s pravděpodobností $(1 - 2\alpha) = 0{,}98$ v intervalu

$$\mathbf{1{,}055} < \hat{C}_{pk} < \mathbf{1{,}798}$$

$(\nu = 40 \,;\, u_{0,01} = -2{,}326 \,;\, u_{0,99} = 2{,}326)$

PŘÍKLAD:

c) Dáno k = 1; n = 30; 60; 100; 200; 500 a $(1\text{-}2\alpha) = 0{,}95$. Stanovíme pro čtyři hodnoty odhadů dolní (první sloupec) a horní (druhý sloupec) konfidenční mez pro parametr C_{pk} :

n	$\hat{C}_{pk} = 1{,}00$		$\hat{C}_{pk} = 1{,}33$		$\hat{C}_{pk} = 1{,}67$		$\hat{C}_{pk} = 2{,}00$	
30	0,743	1,257	0,988	1,672	1,240	2,100	1,485	2,515
60	0,820	1,180	1,090	1,570	1,369	1,971	1,639	2,361
100	0,861	1,139	1,145	1,515	1,437	1,903	1,721	2,279
200	0,902	1,098	1,199	1,461	1,506	1,834	1,804	2,194
500	0,938	1,062	1,247	1,413	1,566	1,774	1,876	2,124

V případě, že je uvažována pouze horní mezní hodnota USL, potom ukazatel způsobilosti $C_{pU} = (USL - \mu) / 3\sigma$ je odhadován na základě výrazu:

$$\hat{C}_{pU} = \frac{USL - \hat{\mu}}{3\hat{\sigma}} \quad .$$

V případě, že je uvažována pouze dolní mezní hodnota LSL, potom ukazatel způsobilosti $C_{pL} = (\mu - LSL) / 3\sigma$ je odhadován na základě výrazu:

$$\hat{C}_{pL} = \frac{\hat{\mu} - LSL}{3\hat{\sigma}} \quad .$$

$\hat{C}_{pU}$ i $\hat{C}_{pL}$ jsou náhodné veličiny. Konfidenční intervaly pro C_{pU} i C_{pL} můžeme vypočítat jako konfidenční interval pro C_{pk}.

Obdobně pro danou hodnotu C_{pU} resp. C_{pL} můžeme stanovit statistický pokryvný interval pro $\hat{C}_{pU}$ i $\hat{C}_{pL}$.

Na základě vypočtených hodnot $\hat{C}_{pU}$ a $\hat{C}_{pL}$ můžeme odhadnout podíl jednotek, které leží nad horní mezní hodnotou USL a podíl jednotek, které leží pod dolní mezní hodnotou LSL.

Označíme

$$\frac{USL - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = 3\,\hat{C}_{pU} = \mathbf{z_U}\,,$$

a

$$\frac{\hat{\mu} - LSL}{\hat{\sigma}} = 3\,\hat{C}_{pL} = \mathbf{z_L}\,.$$

kde z_U a z_L jsou kvantily normovaného normálního rozdělení N(0,1) pro které jsou tabelovány hodnoty distribuční funkce $(1-p_U)$ resp. $(1-p_L)$. Podíly p_U, resp. p_L jsou podíly jednotek nad USL, resp pod LSL.

Tabulka hodnot p_z pro $0 \leq |z| \leq 4$.

$\lvert z \rvert$	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	,5000	,4960	,4920	,4880	,4840	,4801	,4761	,4721	,4681	,4641
0,1	,4602	,4562	,4522	,4483	,4443	,4404	,4364	,4325	,4256	,4247
0,2	,4207	,4168	,4129	,4090	,4052	,4013	,3974	,3936	,3897	,3859
0,3	,3821	,3783	,3745	,3707	,3669	,3632	,3594	,3557	,3520	,3483
0,4	,3446	,3409	,3372	,3336	,3300	,3264	,3228	,3192	,3156	,3121
0,5	,3085	,3050	,3015	,2981	,2946	,2912	,2877	,2843	,2810	,2776
0,6	,2743	,2709	,2676	,2643	,2611	,2578	,2546	,2514	,2483	,2451
0,7	,2420	,2339	,2358	,2327	,2297	,2266	,2236	,2206	,2177	,2148
0,8	,2119	,2090	,2061	,2033	,2005	,1977	,1949	,1922	,1894	,1867
0,9	,1841	,1814	,1788	,1762	,1736	,1711	,1685	,1660	,1635	,1611
1,0	,1587	,1562	,1539	,1515	,1492	,1469	,1446	,1423	,1401	,1379
1,1	,1357	,1335	,1314	,1292	,1271	,1251	,1230	,1210	,1190	,1170
1,2	,1151	,1131	,1112	,1093	,1075	,1056	,1038	,1020	,1003	,0985
1,3	,0968	,0951	,0934	,0918	,0901	,0885	,0869	,0853	,0838	,0823
1,4	,0808	,0793	,0778	,0764	,0749	,0735	,0721	,0708	,0694	,0681
1,5	,0668	,0655	,0643	,0630	,0618	,0606	,0594	,0582	,0571	,0559
1,6	,0548	,0537	,0526	,0516	,0505	,0495	,0485	,0475	,0465	,0455
1,7	,0446	,0436	,0427	,0418	,0409	,0401	,0392	,0384	,0375	,0367
1,8	,0359	,0351	,0344	,0336	,0329	,0322	,0314	,0307	,0301	,0294
1,9	,0287	,0281	,0274	,0268	,0262	,0256	,0250	,0244	,0239	,0233
2,0	,0228	,0222	,0217	,0212	,0207	,0202	,0197	,0192	,0188	,0183
2,1	,0179	,0174	,0170	,0166	,0162	,0158	,0154	,0150	,0146	,0143
2,2	,0139	,0136	,0132	,0129	,0125	,0122	,0119	,0116	,0113	,0110
2,3	,0107	,0104	,0102	,0099	,0096	,0094	,0091	,0089	,0087	,0084
2,4	,0082	,0080	,0078	,0075	,0073	,0071	,0069	,0068	,0066	,0064
2,5	,0062	,0060	,0059	,0057	,0055	,0054	,0052	,0051	,0049	,0048
2,6	,0047	,0045	,0044	,0043	,0041	,0040	,0039	,0038	,0037	,0036
2,7	,0035	,0034	,0033	,0032	,0031	,0030	,0029	,0028	,0027	,0026
2,8	,0026	,0025	,0024	,0023	,0023	,0022	,0021	,0021	,0020	,0019
2,9	,0019	,0018	,0018	,0017	,0016	,0016	,0015	,0015	,0014	,0014
3,0	,00135	,00131	,00126	,00122	,00118	,00114	,00111	,00107	,00104	,00100

Tabulka hodnot p_z pro $|z| \geq 4$.

$\lvert z \rvert$	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
4,0	$,0^{4}317$	$,0^{4}304$	$,0^{4}291$	$,0^{4}279$	$,0^{4}267$	$,0^{4}256$	$,0^{4}245$	$,0^{4}235$	$,0^{4}225$	$,0^{4}216$
4,1	$,0^{4}207$	$,0^{4}198$	$,0^{4}189$	$,0^{4}181$	$,0^{4}174$	$,0^{4}166$	$,0^{4}159$	$,0^{4}152$	$,0^{4}146$	$,0^{4}139$
4,2	$,0^{4}133$	$,0^{4}128$	$,0^{4}122$	$,0^{4}117$	$,0^{4}112$	$,0^{4}107$	$,0^{4}102$	$,0^{5}977$	$,0^{5}934$	$,0^{5}893$
4,3	$,0^{5}854$	$,0^{5}816$	$,0^{5}780$	$,0^{5}746$	$,0^{5}712$	$,0^{5}681$	$,0^{5}650$	$,0^{5}621$	$,0^{5}593$	$,0^{5}567$
4,4	$,0^{5}541$	$,0^{5}517$	$,0^{5}494$	$,0^{5}471$	$,0^{5}450$	$,0^{5}429$	$,0^{5}410$	$,0^{5}391$	$,0^{5}373$	$,0^{5}356$
4,5	$,0^{5}340$	$,0^{5}324$	$,0^{5}309$	$,0^{5}295$	$,0^{5}281$	$,0^{5}268$	$,0^{5}256$	$,0^{5}244$	$,0^{5}232$	$,0^{5}222$
4,6	$,0^{5}211$	$,0^{5}201$	$,0^{5}192$	$,0^{5}183$	$,0^{5}174$	$,0^{5}166$	$,0^{5}158$	$,0^{5}151$	$,0^{5}143$	$,0^{5}137$
4,7	$,0^{5}I30$	$,0^{5}124$	$,0^{5}118$	$,0^{5}112$	$,0^{5}107$	$,0^{5}102$	$,0^{6}968$	$,0^{6}921$	$,0^{6}876$	$,0^{6}834$
4,8	$,0^{6}793$	$,0^{6}755$	$,0^{6}718$	$,0^{6}683$	$,0^{6}649$	$,0^{6}617$	$,0^{6}587$	$,0^{6}558$	$,0^{6}530$	$,0^{6}504$
4,9	$,0^{6}479$	$,0^{6}455$	$,0^{6}433$	$,0^{6}411$	$,0^{6}391$	$,0^{6}371$	$,0^{6}352$	$,0^{6}335$	$,0^{6}318$	$,0^{6}302$
5,0	$,0^{6}287$	$,0^{6}272$	$,0^{6}258$	$,0^{6}245$	$,0^{6}233$	$,0^{6}221$	$,0^{6}210$	$,0^{6}199$	$,0^{6}189$	$,0^{6}179$
5,1	$,0^{6}170$	$,0^{6}161$	$,0^{6}153$	$,0^{6}145$	$,0^{6}137$	$,0^{6}130$	$,0^{6}123$	$,0^{6}117$	$,0^{6}111$	$,0^{6}105$
5,2	$,0^{7}996$	$,0^{7}944$	$,0^{7}895$	$,0^{7}848$	$,0^{7}803$	$,0^{7}760$	$,0^{7}720$	$,0^{7}682$	$,0^{7}646$	$,0^{7}612$
5,3	$,0^{7}579$	$,0^{7}548$	$,0^{7}519$	$,0^{7}491$	$,0^{7}465$	$,0^{7}440$	$,0^{7}416$	$,0^{7}394$	$,0^{7}372$	$,0^{7}352$
5,4	$,0^{7}333$	$,0^{7}315$	$,0^{7}298$	$,0^{7}282$	$,0^{7}266$	$,0^{7}252$	$,0^{7}238$	$,0^{7}225$	$,0^{7}213$	$,0^{7}201$
5,5	$,0^{7}190$	$,0^{7}179$	$,0^{7}169$	$,0^{7}160$	$,0^{7}151$	$,0^{7}143$	$,0^{7}135$	$,0^{7}127$	$,0^{7}120$	$,0^{7}114$
5,6	$,0^{7}107$	$,0^{7}101$	$,0^{8}955$	$,0^{8}901$	$,0^{8}850$	$,0^{8}802$	$,0^{8}757$	$,0^{8}714$	$,0^{8}673$	$,0^{8}635$
5,7	$,0^{'8}599$	$,0^{8}565$	$,0^{8}533$	$,0^{8}502$	$,0^{8}473$	$,0^{8}446$	$,0^{8}421$	$,0^{8}396$	$,0^{8}374$	$,0^{8}352$
5,8	$,0^{8}332$	$,0^{8}312$	$,0^{8}294$	$,0^{8}277$	$,0^{8}261$	$,0^{8}246$	$,0^{8}231$	$,0^{8}218$	$,0^{8}205$	$,0^{8}193$
5,9	$,0^{8}182$	$,0^{8}171$	$,0^{8}161$	$,0^{8}151$	$,0^{8}143$	$,0^{8}134$	$,0^{8}126$	$,0^{8}119$	$,0^{8}112$	$,0^{8}105$
6,0	$,0^{9}987$	$,0^{9}928$	$,0^{9}872$	$,0^{9}820$	$,0^{9}771$	$,0^{9}724$	$,0^{9}681$	$,0^{9}640$	$,0^{9}601$	$,0^{9}565$

PŘÍKLAD:

Dáno: LSL = 21,5 a USL = 22,5 ; vypočteno $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = 22{,}1$

a $\hat{\sigma} = 0{,}14$.

Potom

$\hat{C}_{pU} = 0{,}952$ t.j. $z_U = 2{,}856$ a $p_U = 0{,}002145$,

$\hat{C}_{pL} = 1{,}429$ t.j. $z_L = 4{,}287$ a $p_L = 0{,}000009$.

A tedy celkem mimo obě mezní hodnoty je $p = 0{,}002154$.

3) Ukazatele **P_p** a **P_{pk}** odhadujeme na základě jednoho náhodného výběru rozsahu N. V některých případech se tento výběr skládá z k podskupin stejného rozsahu n, potom N = k*n. Z výběru, nebo výběrů, vypočteme

celkový průměr: $$\bar{x}_{tot} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$(\bar{x}_{tot} = \bar{\bar{x}} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_j \quad , \text{ kde } \quad \bar{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \qquad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, k)\ ,$$

celkovou směrodatnou odchylku: $$s_{tot} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}_{tot}\right)^2}\ .$$

Vypočteme ukazatele výkonnosti :

$$\hat{P}_p = \frac{USL - LSL}{6\,s_{tot}} \qquad a \qquad \hat{P}_{pk} = \min\left\{\frac{USL - \bar{x}_{tot}}{3\,s_{tot}}\ ;\ \frac{\bar{x}_{tot} - LSL}{3\,s_{tot}}\right\}$$

$\hat{P}_p$ i $\hat{P}_{pk}$ jsou náhodné veličiny. Konfidenční interval pro P_p i P_{pk} na konfidenční úrovni (1 - 2α) je dán obdobnými výrazy jako konfidenční intervaly pro Cp a C_{pk}, počet stupňů volnosti v tomto případě je ν = N – 1.

Pro danou hodnotu P_p i P_{pk} můžeme stanovit interval (statistický pokryvný interval), ve kterém se budou s pravděpodobností $(1 - 2\alpha)$ vyskytovat odhady $\hat{P}_p$ a $\hat{P}_{pk}$.

V případě, že je uvažována pouze horní mezní hodnota USL, potom ukazatel výkonnosti $P_{pU} = (USL - \mu) / 3\sigma_{tot}$ je odhadován na základě výrazu:

$$\hat{P}_{pU} = \frac{USL - \bar{x}_{tot}}{3\, s_{tot}}$$

V případě, že je uvažována pouze dolní mezní hodnota LSL, potom ukazatel výkonnosti $P_{pL} = (\mu - LSL) / 3\sigma_{tot}$ je odhadován na základě výrazu:

$$\hat{P}_{pL} = \frac{\bar{x}_{tot} - LSL}{3\, s_{tot}}$$

$\hat{P}_{pU}$ a $\hat{P}_{pL}$ jsou náhodné veličiny. Konfidenční intervaly pro P_{pU} i P_{pL} můžeme vypočítat jako konfidenční interval pro C_{pk} , počet stupňů volnosti je $\nu = N – 1$.

Na základě vypočtených hodnot $\hat{P}_{pU}$ a $\hat{P}_{pL}$ můžeme odhadnout podíl jednotek, které leží nad horní mezní hodnotou USL, a podíl jednotek, které leží pod dolní mezní hodnotou LSL.

Označme

$$3\,\hat{P}_{pU} = \mathbf{z_U}\,,$$

a

$$3\,\hat{P}_{pL} = \mathbf{z_L}\,.$$

kde z_U a z_L jsou kvantily normovaného normálního rozdělení N(0,1) pro které jsou tabelovány hodnoty distribuční funkce $(1-p_U)$ resp. $(1-p_L)$. Podíly p_U, resp. p_L jsou podíly jednotek nad USL, resp pod LSL.

PŘÍKLAD:

Vypočten ukazatel $\hat{P}_{pL} = 1{,}12$; $z_L = 3{,}36$; $p(z_L) = 0{,}00039$.

4) Ukazatele **P_p , P_{pk} , P_{pL} , P_{pU} , P_{km}** v případě, že sledovaná jakostní vlastnost nemá normální rozdělení, se odhadují na základě 99,865% kvantilu U_p , 0,135 % kvantilu L_p a 50% kvantilu Me. Pokud rozdělení je známé (log-normální, Weibulovo, překlopené normální atd.) lze uvedené kvantily vypočítat přímo. Obecně vzorce a tabulky pro výpočet uvedených kvantilů vycházejí z třídy Pearsonových křivek (rozdělení).

Vypočteme odhady ukazatelů výkonnosti

P_p , P_{pU} , P_{pL} , P_{pk} , případně P_{pm} :

$$\hat{P}_p = \frac{USL - LSL}{U_p - L_p} \qquad \hat{P}_{pU} = \frac{USL - Me}{U_p - Me} \qquad \hat{P}_{pL} = \frac{Me - LSL}{Me - L_p}$$

$$\hat{P}_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left[(U_p - L_p)/6\right]^2 + (Me - T)^2}}$$

INTERPRETACE VLASTNOSTÍ UKAZATELŮ ZPŮSOBILODSTI A VÝKONNOSTI

1. Všechny ukazatele způsobilosti a výkonnosti jsou bezrozměrné veličiny.

2. Má-li náhodná veličina normální rozdělení N(μ, σ^2) a proces probíhá za působení pouze náhodných příčin variability, t.j. proces je ve statisticky zvládnutém stavu – z hlediska průměru procesu je centrován (tedy platí μ = (USL + LSL) / 2) a z hlediska variability má stálou a známou směrodatnou odchylku σ, potom

a) očekávaný podíl neshodných (podíl mimo toleranční pole) $p = 2p_z$ pro $z_p = 3C_p$; (Hodnoty z_p jsou kvantily rozdělení N(0,1)).

b) **garance, např. při C_p = 1, vyjadřuje, že "podíl neshodných v procesu bude alespoň 0,27 %" a nikoliv, že "podíl neshodných v procesu nepřesáhne 0,27 %";**

c) "jakost" odhadu C_p, C_{pk}, C_{pm}, P_p, P_{pk}, P_{pm} závisí na "jakosti" odhadu příslušné směrodatné odchylky.

3. Ukazatel C_p a P_p vyjadřují obecně

“čeho jsme schopni dosáhnout”

čeho je schopen dosáhnout proces nebo zařízení za ideálního centrování, při působení pouze náhodných příčin variability a udržení tohoto stavu v čase.

C_p a P_p charakterizují krajní možnost procesu nebo zařízení.

4. Ukazatele C_{pk} a P_{pk} vyjadřují obecně

“čeho jsme ve skutečnosti dosáhli”

a mírou této skutečnosti je odhad dolní hodnoty podílu neshodných $p(z_L)$ a $p(z_U)$ pro $z_L = 3\,\hat{c}_{pL}$ resp. $z_L = 3\,\hat{P}_{pL}$ a $z_U = 3\hat{c}_{pu}$ resp. $z_U = 3\,\hat{P}_{pu}$. (Hodnoty z jsou kvantily rozdělení N(0,1).

5. Vždy platí :

$$C_p \geq C_{pk} \geq C_{pm}$$

$$P_p \geq P_{pk} \geq P_{pm}$$

$$C_p \geq P_p \quad ; \quad C_{pk} \geq P_{pk} \quad ; \quad C_{pm} \geq P_{pm}$$

6. Metodika koncernu Ford uvažuje výpočet ukazatelů způsobilosti, výkonnosti, i v případech, kdy v čase dochází ke zdůvodněným a známým změnám střední hodnoty procesu v rozmezí $\Delta = \mu_{max} - \mu_{min}$. Potom jsou navrženy výrazy pro výpočet odhadů

$$\hat{P}_p = \frac{(USL - LSL)}{6\,s + \Delta} \quad \text{a} \quad \hat{P}_{pk} = \frac{\min(\bar{\bar{x}} - LSL\,;USL - \bar{\bar{x}})}{3\,s + \Delta/2}$$

ZPŮSOBILOST MĚŘENÍ

- Při ověřování vhodnosti měřícího zařízení.
- 20 až 50 opakovaných měření etalonu.
- Výsledky zaznamenány v časové posloupnosti měření.

Ukazatele způsobilosti měřícího procesu (měřidla) :

A) vycházející **z mezních hodnot** znaku:

$$\mathbf{C_g} = 0{,}15(USL - LSL) / 6s_g;$$

$$\mathbf{C_{gk}} = \min\left\{ \frac{\bar{x} - (T - 0{,}075\Delta)}{3s_g}; \frac{(T + 0{,}075\Delta)}{3s_g} \right\},$$

kde s_g je výběrová směrodatná odchylka, vypočtená z naměřených hodnot a Δ = USL – LSL .

B) vycházející z **celkové variability** procesu:

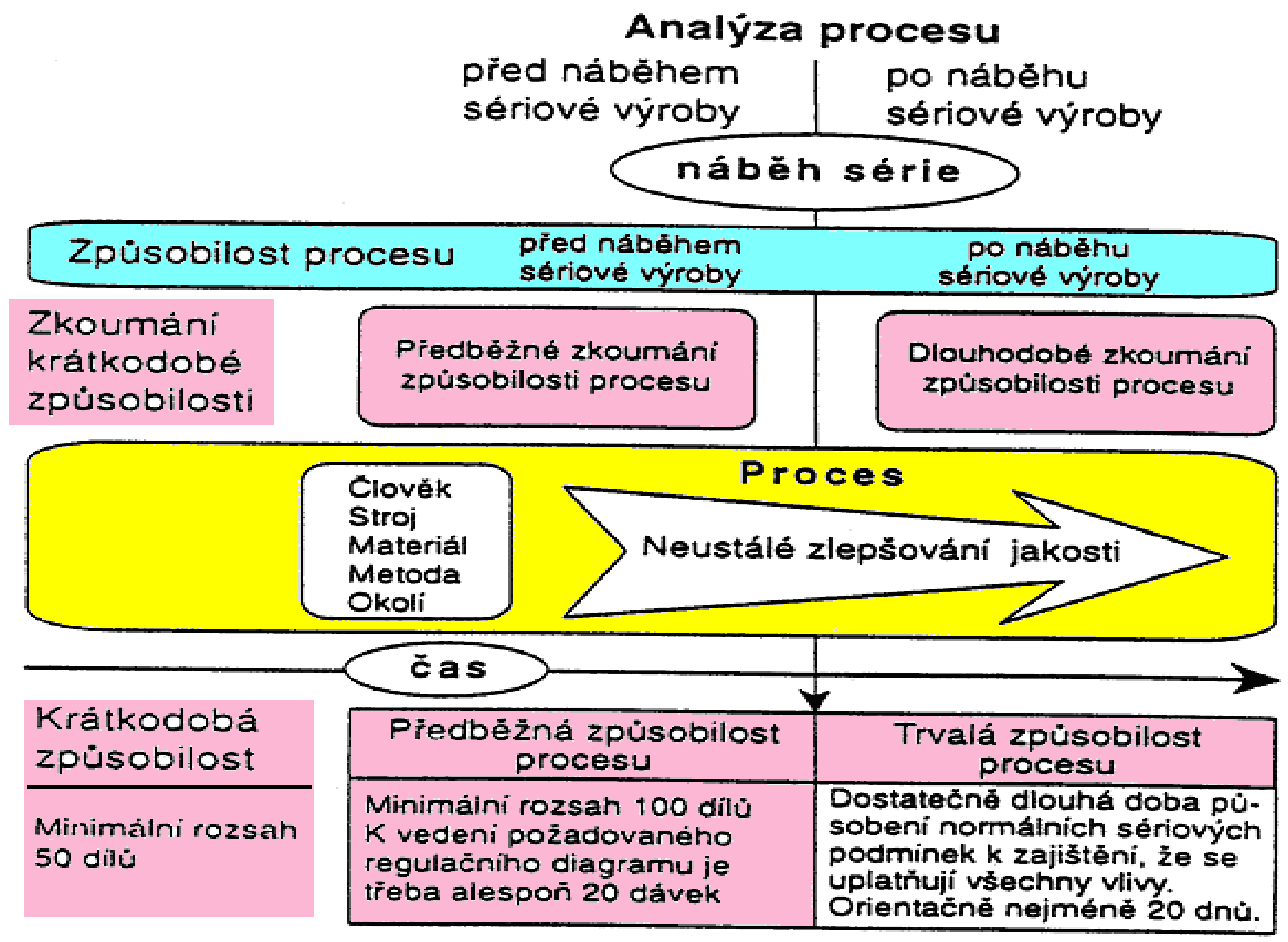
$$\mathbf{C_g} = 0{,}15\,\hat{\sigma}_{tot} / s_g;$$

$$\mathbf{C_{gk}} = \min\left\{ \frac{\bar{x} - (T - 0{,}45\hat{\sigma}_{tot})}{3s_g}; \frac{(T + 0{,}45\hat{\sigma}_{tot}) - \bar{x}}{3s_g} \right\},$$

kde $\hat{\sigma}_{tot}$ je odhad celkové směrodatné odchylky v procesu.

ANALÝZA ZPŮSOBILOSTI PROCESU

podle VDA


Analýza procesu
před náběhem sériové výroby
po náběhu sériové výroby
náběh série
Způsobilost procesu
před náběhem sériové výroby
po náběhu sériové výroby
Zkoumání krátkodobé způsobilosti
Předběžné zkoumání způsobilosti procesu
Dlouhodobé zkoumání způsobilosti procesu
Proces
Člověk
Stroj
Materiál
Metoda
Okolí
Neustálé zlepšování jakosti
čas
Krátkodobá způsobilost
Minimální rozsah 50 dílů
Předběžná způsobilost procesu
Minimální rozsah 100 dílů
K vedení požadovaného regulačního diagramu je třeba alespoň 20 dávek
Trvalá způsobilost procesu
Dostatečně dlouhá doba působení normálních sériových podmínek k zajištění, že se uplatňují všechny vlivy.
Orientačně nejméně 20 dnů.

KRÁTKODOBÉ vyšetřování způsobilosti
(vyšetřování způsobilosti strojů)

- Při přejímání výrobních zařízení nebo strojů u výrobce.
- Předběžná výpověď o vlastnostech strojů, posouzení jejich vhodnosti.
- Odběr 50 po sobě jdoucích kusů, nebo 10 podskupin po 5 kusech.
- Výsledky zaznamenány v časové posloupnosti výroby.
- Vyšetřit tvar rozdělení z 50 hodnot s použitím např. pravděpodobnostního papíru.
- Stanovit $\hat{C}_p$ a 99%–konfidenční interval pro C_p :
(v tomto případě $\hat{C}_p = \hat{P}_p$)

$$0{,}75\,\hat{C}_p \leq C_p \leq 1{,}26\,\hat{C}_p \,.$$

Metodika která vychází z VDA 4.1, označuje uvedené ukazatele C_M .

PŘEDBĚŽNÉ vyšetřování způsobilosti procesu
(odhad dlouhodobé způsobilosti)

- Experiment za simulovaných podmínek sériové výroby.
- Odběr 25 podskupin po 5 jednotkách při stejných kontrolních intervalech (nejméně 20 podskupin po 3 jednotkách) .
- Konstrukce Shewhartova regulačního diagramu.
- Ověření tvaru rozdělení.
- Stanovit a 99%–konfidenční intervaly ze všech N = 125 (nejméně 60) pozorování

$$0{,}82\ \hat{C}_p \leq C_p \leq 1{,}18\ \hat{C}_p\,,$$

.

$$0{,}82\ \hat{P}_p \leq P_p \leq 1{,}18\ \hat{P}_p\,.$$

Je požadováno aby $\hat{C}_p$ i $\hat{P}_p \geq 1{,}67$.

Výpočet konfidenčního intervalu vychází z počtu stupňů volnosti $\nu = 100$

DLOUHODOBÉ vyšetřování způsobilosti procesu

- Experiment za reálných podmínek sériové výroby.
- Sledování po dobu 20 pracovních dnů.
- Odběr minimálně 5 podskupin po 5 jednotkách denně při stejných kontrolních intervalech (nejméně 500 kusů).
- Používat Shewhartovy regulační diagramy.
- Stanovit $\hat{C}_p$, $\hat{P}_p$ a $\hat{C}_{pk}$, $\hat{P}_{pk}$ ze všech podskupin a 99%–konfidenční intervaly.

DOHODA MEZI ODBĚRATELEM A DODAVATELEM

Při každém vyšetřování způsobilosti, požadovaném zejména odběratelem je nutno stanovit (dohodnout):

- **podmínky experimentu**, jako např.:
  - počet podskupin,
  - rozsah podskupin,
  - kontrolní interval,
  - způsob odběru vzorků,
  - specifikace,
  - metodu statistické regulace;

- **postup zpracování výsledků**, jako např.:
  - způsob odhadu směrodatné odchylky σ,
  - analytický tvar ukazatele způsobilosti,
  - konfidenční úroveň $1 - \alpha$.

Způsobilost v případě kvalitativního znaku

Za předpokladu statisticky zvládnutého procesu pro alespoň $k_0 = 25$ podskupin rozsahu n je způsobilost procesu definována jako průměrná hodnota zvolené výběrové charakteristiky:

podíl neshodných
$$\bar{p} = \frac{1}{nk_0}\sum_{j=1}^{k_0}(np_j)$$

počet neshodných
$$n\bar{p} = \frac{1}{k_0}\sum_{j=1}^{k_0}(np_j)$$

počet neshod ve výběru
$$\bar{c} = \frac{1}{k_0}\sum_{j=1}^{k_0}c_j$$

průměrný počet neshod na jednotku
$$\bar{u} = \frac{1}{nk_0}\sum_{j=1}^{k_0}c_j$$

Dosažené výsledky způsobilosti ($\bar{p}$, $n\bar{p}$, $\bar{c}$ a $\bar{u}$) je třeba konfrontovat s přáním zákazníka.

DĚKUJEME ZA POZORNOST