

# **Regulační diagramy**

## **CUSUM**

### **pro atributivní znaky**

Eva Jarošová

# Obsah

1. Klasické diagramy pro atributivní znaky, omezení a nevýhody jejich aplikace
2. Přístup založený na transformaci sledované veličiny
3. CUSUM diagramy pro transformovanou proměnnou
4. CUSUM diagramy založené na předpokládaném rozdělení sledované veličiny

# Klasické Shewhartovy diagramy

- Pro počet neshodných jednotek v podskupině
- Pro podíl neshodných jednotek v podskupině
- Pro počet neshod
- Pro podíl neshod na jednotku

Založeny na předpokladu normálního rozdělení, jímž lze za určitých podmínek aproximovat skutečné rozdělení sledované veličiny

# Podmínky pro aproximaci

Binomické rozdělení  $Bi(n, \pi)$

střední hodnota  $n\pi > 5$  nebo  $n\pi > 8$

Poissonovo rozdělení  $Po(\lambda)$

střední hodnota  $\lambda > 5$  nebo  $\lambda > 8$

(nezávislost)

Regulační meze ve vzdálenosti  $\pm 3$  sigma

riziko falešného signálu v podobě překročení horní

regulační meze 0,00135

# Důsledky nesplnění podmínky

vlivem nedostatečného rozsahu výběru

nesymetrické meze – záporná hodnota  
pro dolní mez se nahradí nulou

větší riziko falešného signálu

(i pro  $n\pi=5$ )

nelze diagnostikovat okamžik zlepšení

# Alternativní přístupy

- Transformace + Shewhartův diagram
- Transformace + CUSUM
- CUSUM přímo

# Podstata CUSUM diagramů

První CUSUM Page (1954), od té doby řada modifikací

Dvě základní

- Kumulativní součty odchylek od cílové hodnoty

$$S_t = \sum_{i=1}^t (X_i - \mu_0)$$

rozhodování pomocí **V-masky**

- Kumulativní součty

$$S_i^+ = \max \left[ S_{i-1}^+ + (X_i - K^+); 0 \right] \quad S_i^- = \min \left[ S_{i-1}^- + (X_i - K^-); 0 \right]$$

**tabelární CUSUM** (podobný klasickému diagramu)

# Tabelární CUSUM pro měřitelné znaky

$\mu_0$  – cílová hodnota

$$C_i^+ = \max \left[ 0; x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+ \right]$$

$$C_i^- = \min \left[ 0; x_i - (\mu_0 - K) + C_{i-1}^- \right]$$

$$C_0^+ = C_0^- = 0$$

$$K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = k\sigma \quad \sigma - \text{směrodatná odchylka}$$

$H = h\sigma$  – rozhodovací interval

$$k = 0,5 \quad h = 4 \text{ nebo } 5$$



# CUSUM pro počet neshodných

Založen na binomickém rozdělení počtu neshod v podskupině

horní CUSUM

$$S_i^+ = \max \left[ S_{i-1}^+ + (X_i - K^+); 0 \right]$$

dolní CUSUM

$$S_i^- = \min \left[ S_{i-1}^- + (X_i - K^-); 0 \right]$$

Cílová hodnota počtu neshod v podskupině  $p_0$

Konstanta pro identifikaci posunu  $p_1 - p_0$

$$K^+ = K^- = \frac{n \ln \left( \frac{1-p_0}{1-p_1} \right)}{\ln \left( \frac{p_1}{1-p_1} \frac{1-p_0}{p_0} \right)}$$

Meze pro  $S^+$  a  $S^-$  (rizika  $\alpha$  a  $\beta$ )

$$H^+ = \frac{-\ln \alpha}{\ln \left( \frac{p_1}{1-p_1} \frac{1-p_0}{p_0} \right)}$$

$$H^- = \frac{\ln \beta}{\ln \left( \frac{p_1}{1-p_1} \frac{1-p_0}{p_0} \right)}$$

# CUSUM pro počet neshod

Založen na Poissonovu rozdělení počtu neshod v podskupině

horní CUSUM

$$S_i^+ = \max \left[ S_{i-1}^+ + (X_i - K^+); 0 \right]$$

dolní CUSUM

$$S_i^- = \min \left[ S_{i-1}^- + (X_i - K^-); 0 \right]$$

Cílová hodnota počtu neshod v podskupině  $c_0$

Konstanta pro identifikaci posunu  $c_1 - c_0$

$$K^+ = K^- = \frac{c_1 - c_0}{\ln \left( \frac{c_1}{c_0} \right)}$$

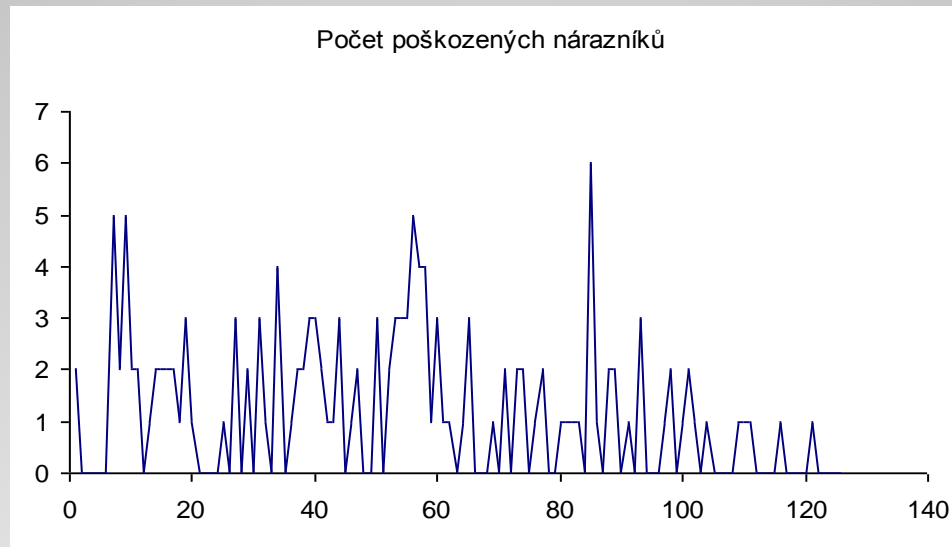
Meze pro  $S^+$  a  $S^-$  (rizika  $\alpha$  a  $\beta$ )

$$H^+ = \frac{-\ln \alpha}{\ln \left( \frac{c_1}{c_0} \right)}$$

$$H^- = \frac{\ln \beta}{\ln \left( \frac{c_1}{c_0} \right)}$$

# Případová studie

## Dodávky nárazníků

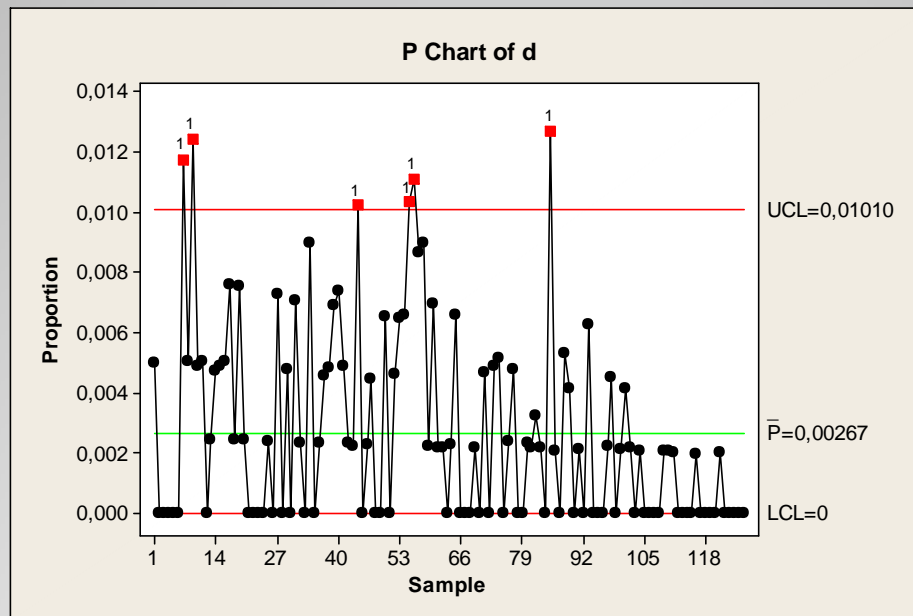


Proměnná velikost dodávek 263 – 508 kusů, průměrná velikost 434

# P-diagram, konstantní meze

Základní hodnoty nejsou dány

$$\bar{p} \pm 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p}) / \bar{n}}$$



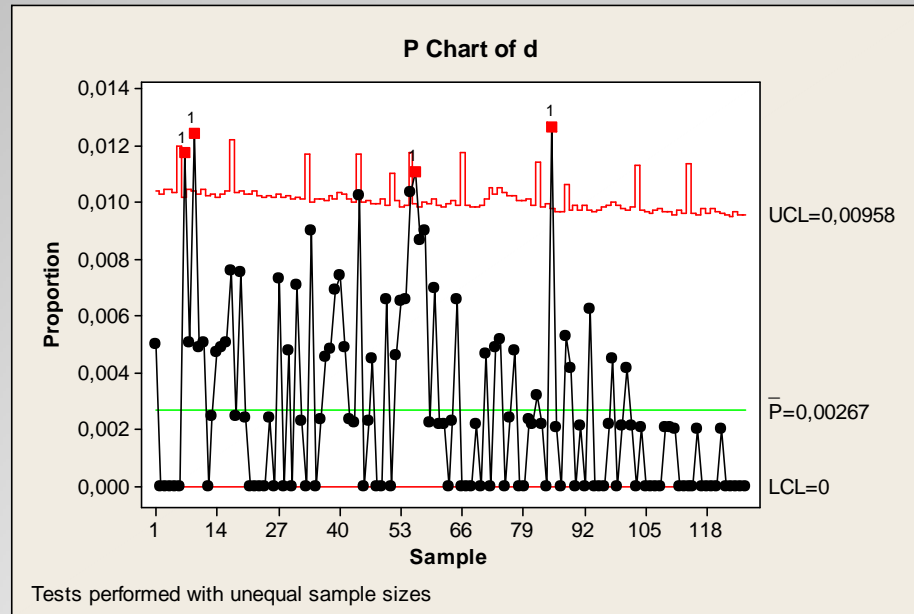
LCL vychází záporná

LCL = 0

Nestejné rozsahy - proměnlivé riziko falešného signálu

# P-diagram, proměnné meze

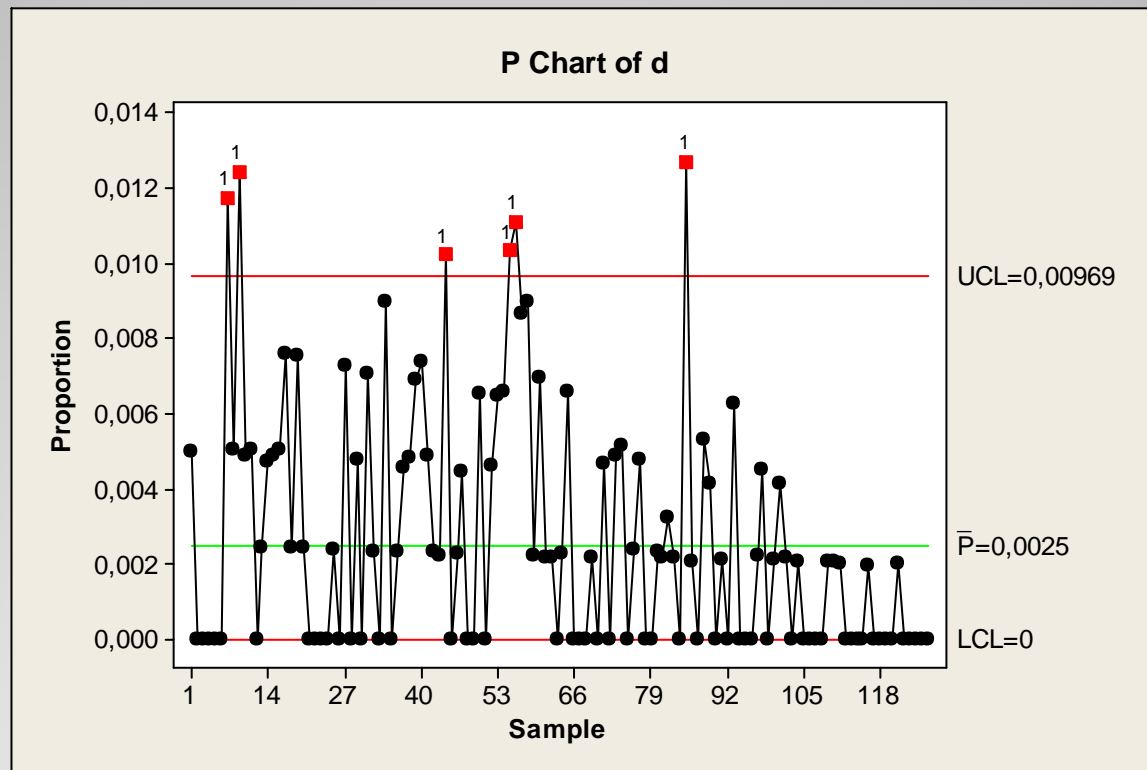
$$\bar{p} \pm 3\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p}) / n_i}$$



# P-diagram, konstantní meze

Základní hodnoty dány;  $p_0 = 0,0025$

$$p_0 \pm 3\sqrt{p_0(1-p_0)/\bar{n}}$$

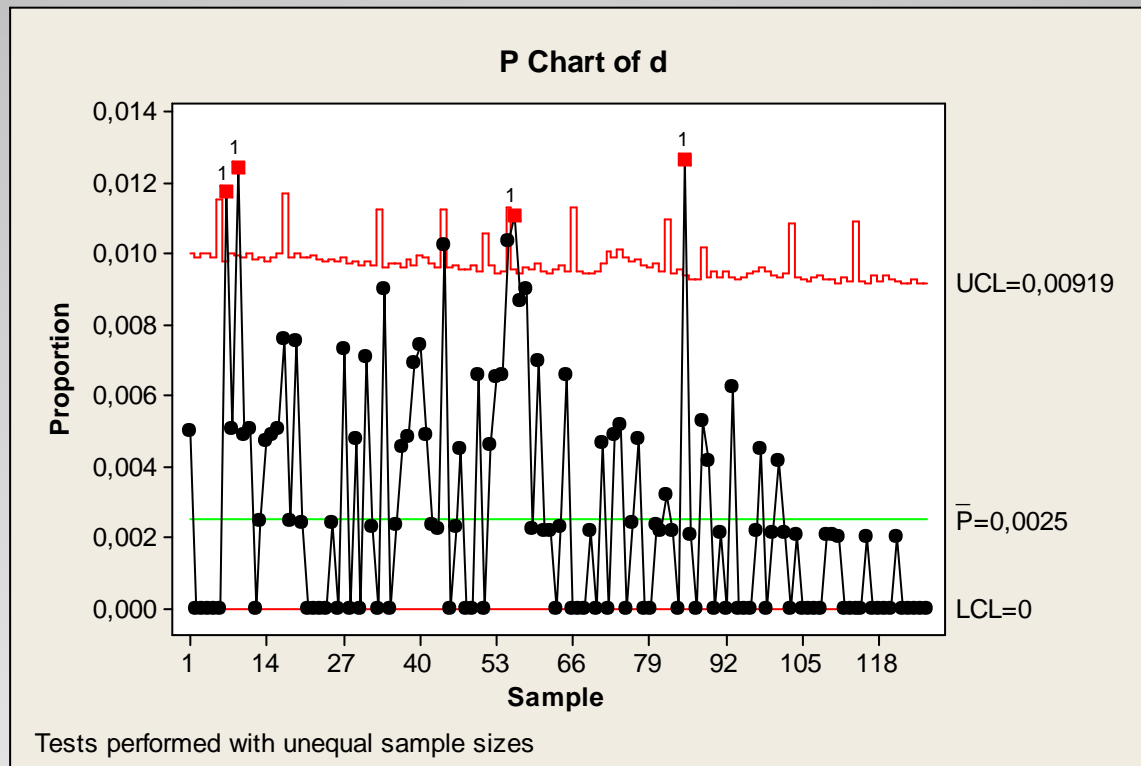


$$\bar{n}p_0 = 1,085$$

Skutečné riziko falešného signálu (překročení UCL) – 0,005

# P-diagram, proměnné meze

Základní hodnoty dány;  $p_0 = 0,0025$



# Přístup založený na transformaci

A. Transformace založená na normování

$$X_i = \frac{p_i - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n_i}}$$

B. Transformace arcsin

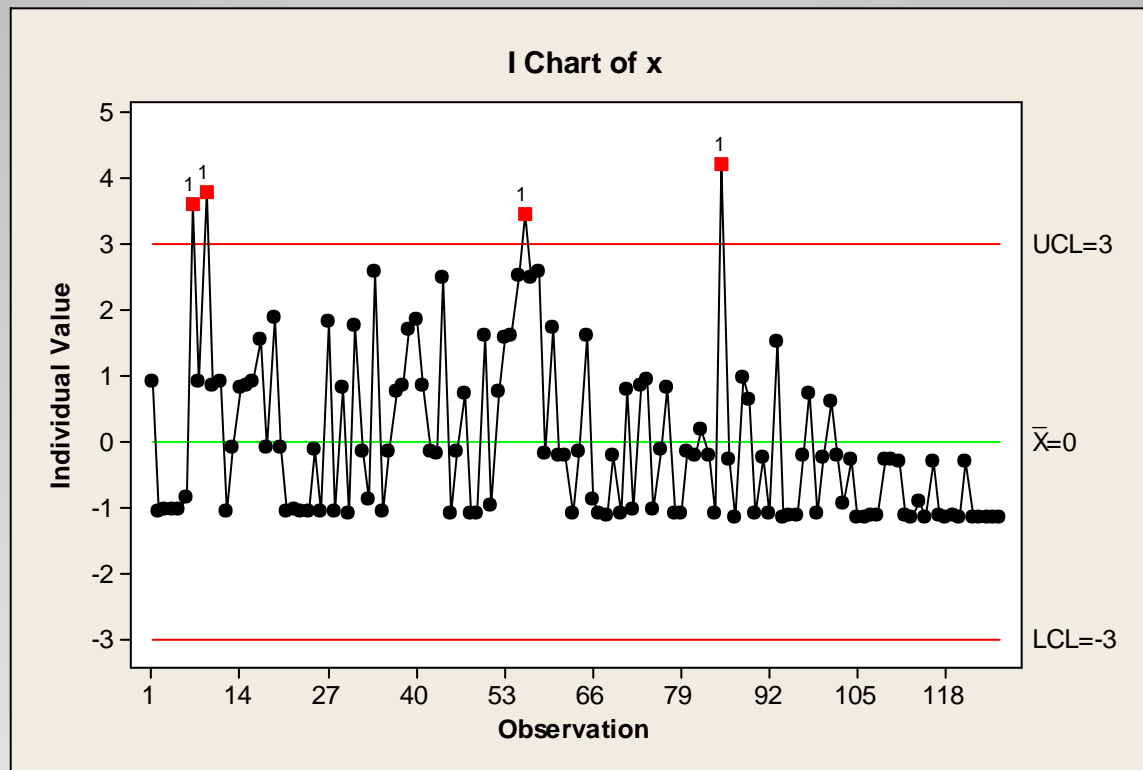
$$Y_i = \arcsin \sqrt{\frac{x_i + 3/8}{n_i + 3/4}}$$

- I-diagram pro individuální hodnoty
- CUSUM diagram



# I-diagram

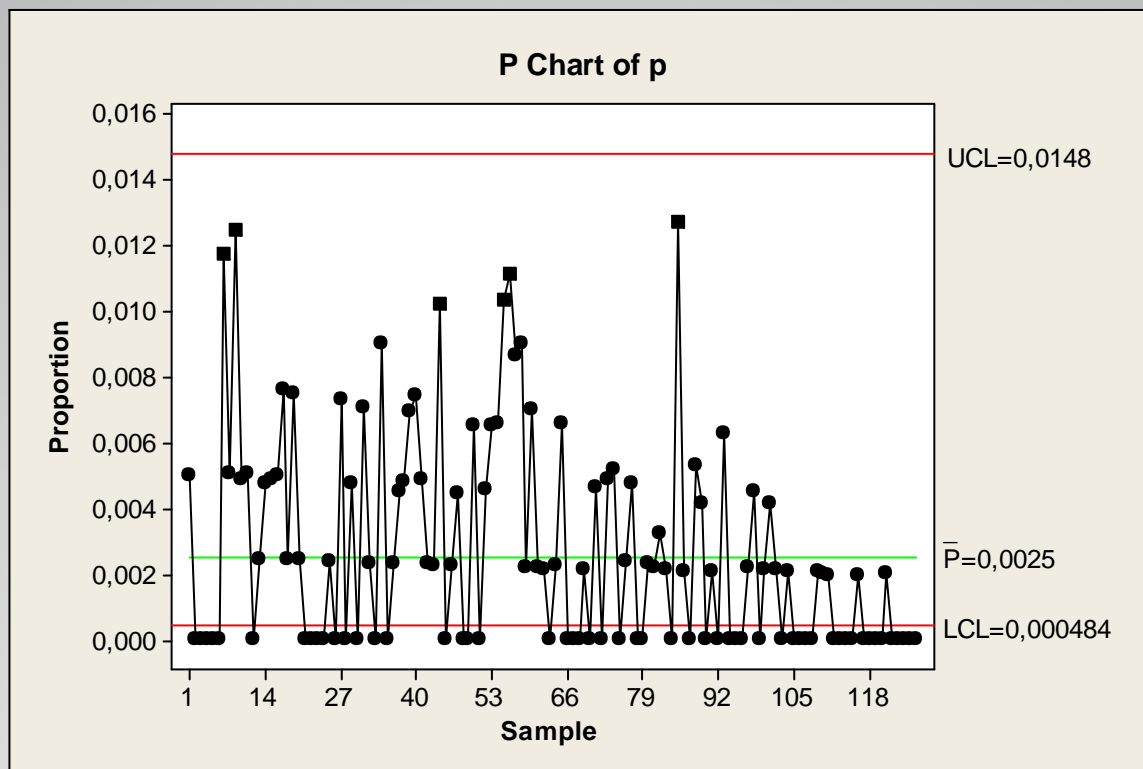
Diagram pro individuální hodnoty (regulace měření)



Normované normální rozdělení - pevné meze  $\pm 3$

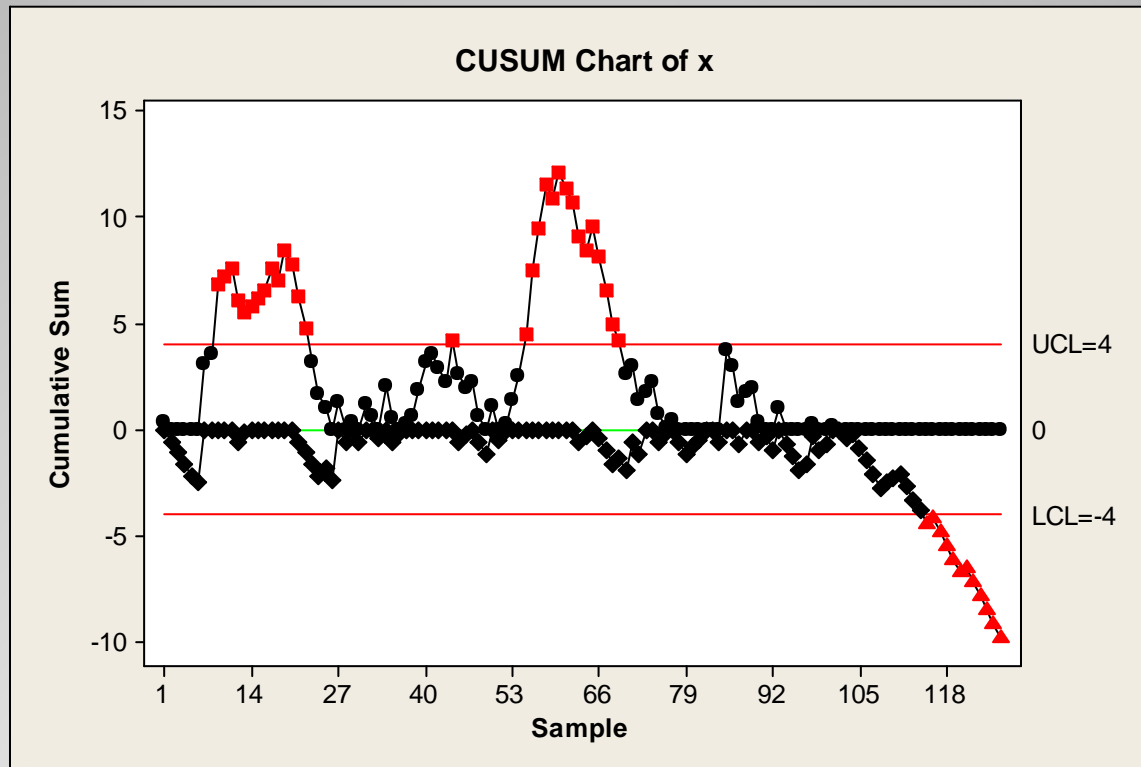
# I-diagram a zpětná transformace

Základní hodnoty dány;  $p_0 = 0,0025$



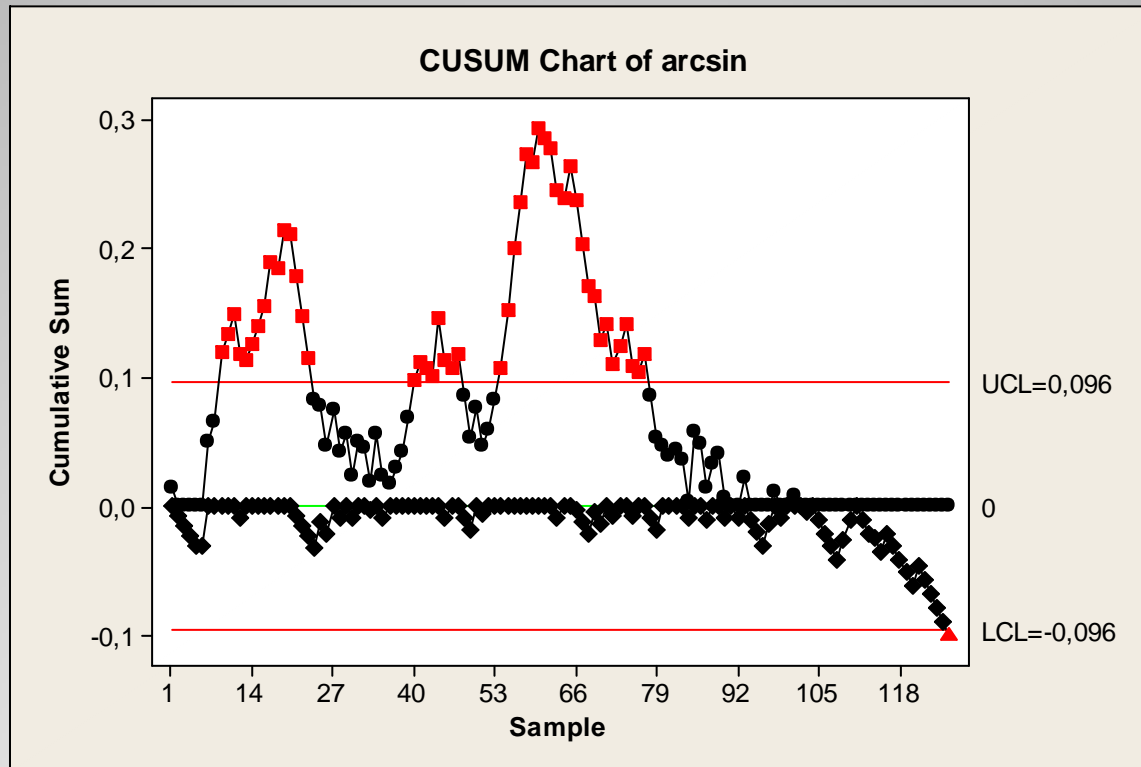
Střední hodnota  $\arcsin \sqrt{p}$ , směrodatná odchylka  $1\sqrt{4n}$

# CUSUM pro transformovanou proměnnou



Cílová hodnota = 0, směrodatná odchylka = 1,  $h = 0,5$ ,  $k = 4$

# CUSUM pro transformovanou proměnnou



Cílová hodnota  $p_0 = 0,0025$

Cílová hodnota po transformaci = 0,05; směrodatná odchylka = 0,024,  $h = 0,5$ ,  $k = 4$

# Případová studie

Průměr procesu  $\bar{p} = 0,00267$

Cílová hodnota  $p_0 = 0,0025$

Směrodatná odchylka kolísání  $p \quad \sqrt{p_0(1-p_0)/\bar{n}} = 0,0024$

Nepřijatelná hodnota  $p$ , která by měla být odhalena

$$p_1 = 0,005$$

Rizika chybného rozhodnutí  $\alpha = 0,00135 \quad \beta = 0,01$

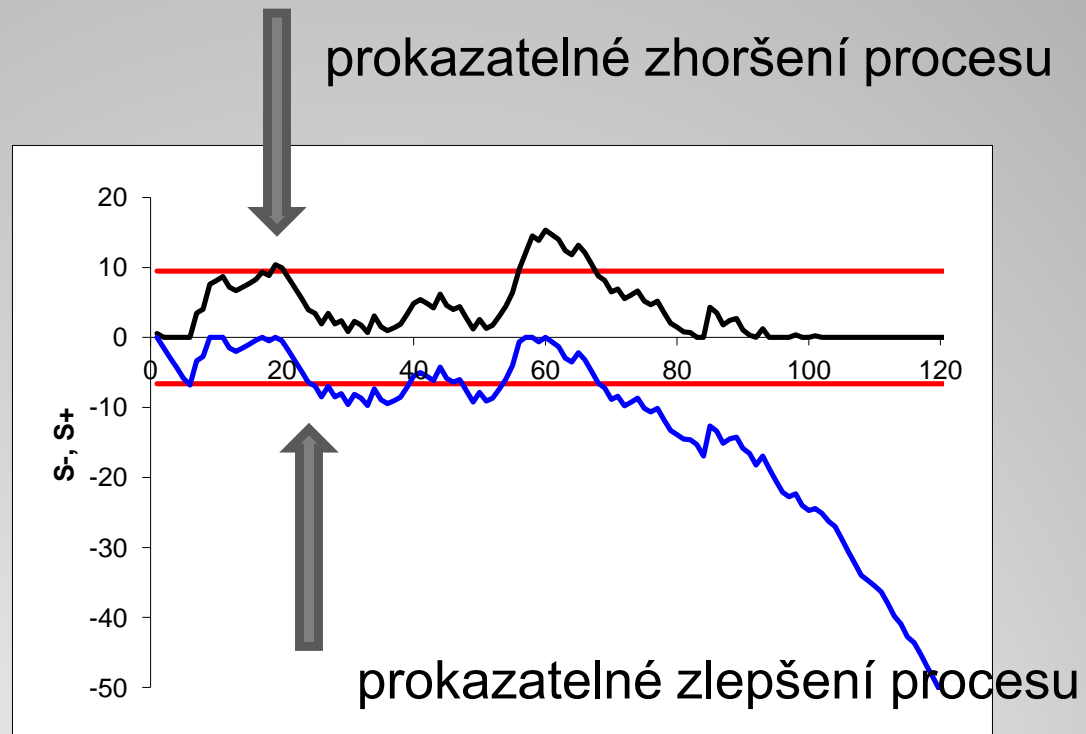
Parametry CUSUM  $K^+ = K^- = 1,439 \quad H^+ = 9,498 \quad H^- = -6,620$

# Horní a dolní CUSUM

$$K^+ = K^- = 1,439$$

$$H^+ = 9,498$$

$$H^- = -6,620$$



# Použití diagramu

- Překročení horní meze

hledá se vymezitelná příčina; je-li hledání úspěšné, příčina se odstraní a kumulativní součet se vynuluje (na obrázku se vynulování neuvažuje)

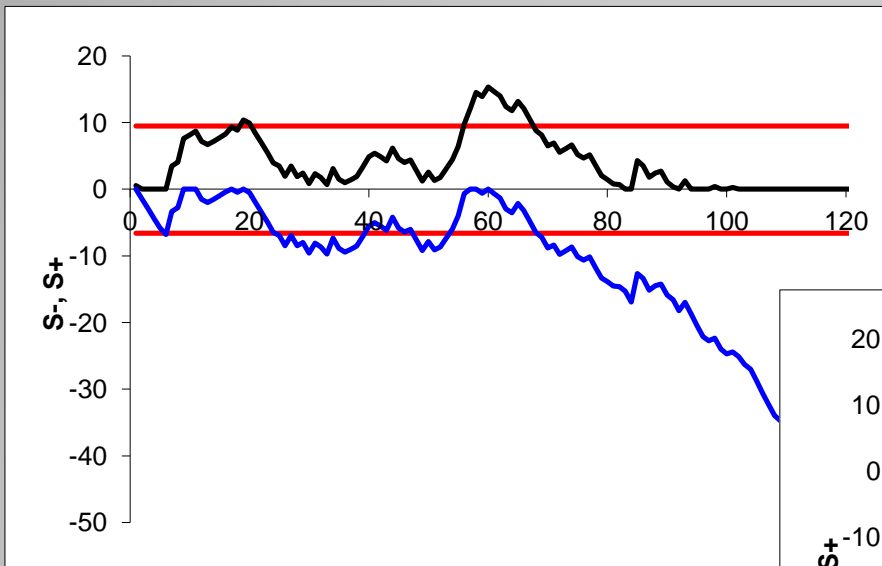
- Překročení dolní meze

znamená zlepšení procesu

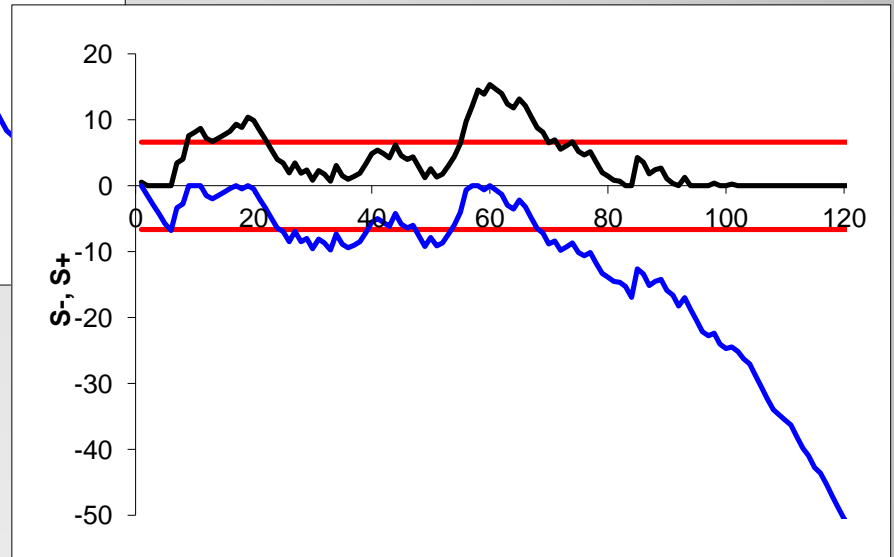
s ohledem na neustálé zlepšování procesu by se měla revidovat cílová hodnota, určit nové parametry CUSUM diagramu, vynulovat kumulativní součty a pokračovat dál (jinak při podílu neshodných trvale lepším než je původní cílová hodnota bude dolní kumulativní součet pořád klesat a jeho zobrazování přestává mít smysl)

# Vliv volby rizik

$$\alpha = 0,00135 \quad \beta = 0,01$$



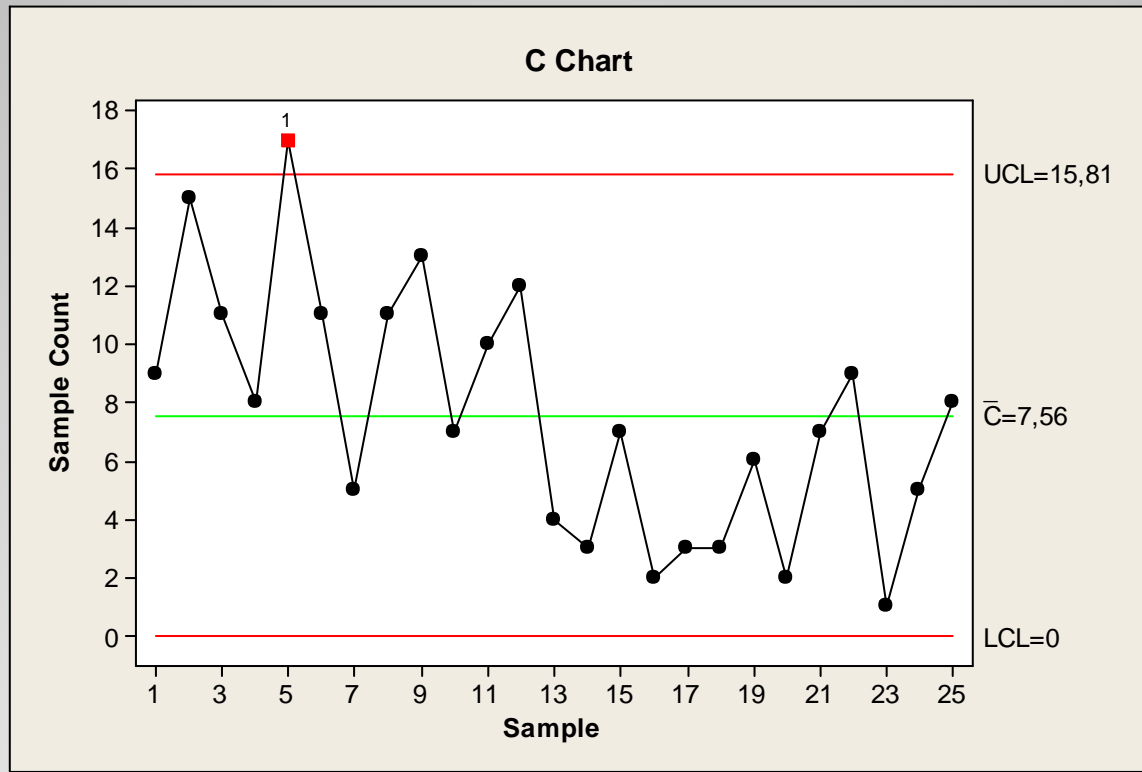
$$\alpha = 0,01 \quad \beta = 0,01$$





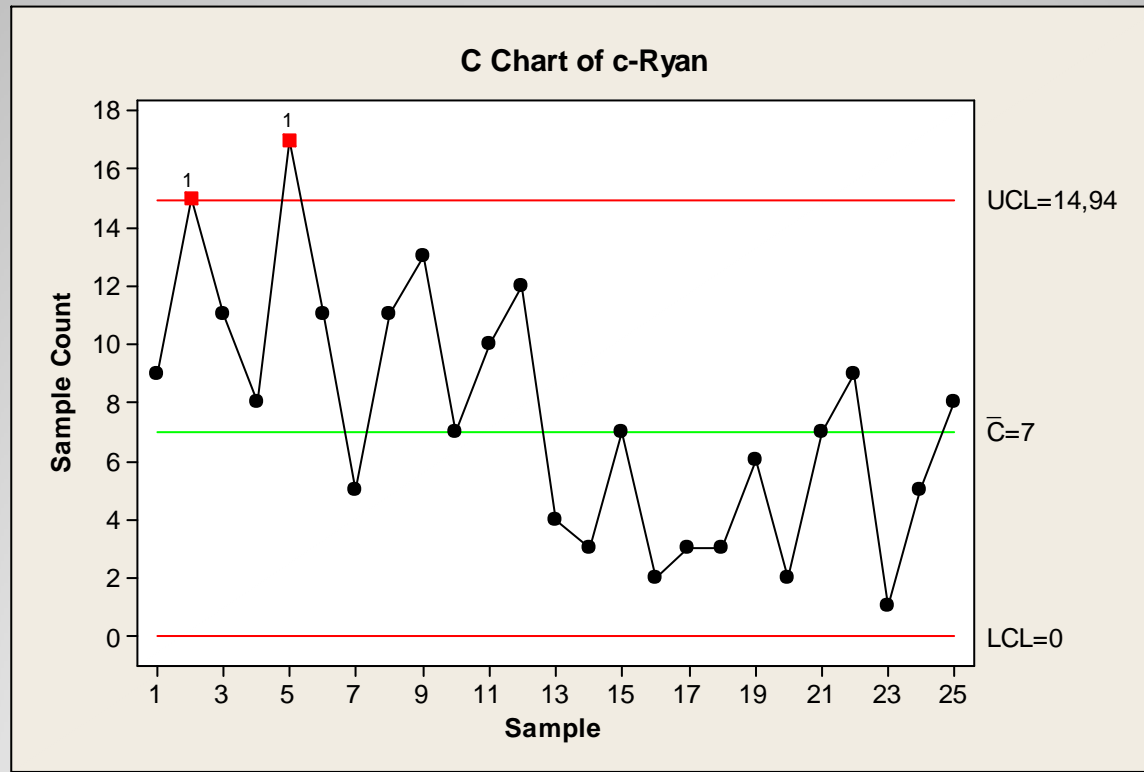
# Diagram pro počet neshod

Příklad Ford Motor (Ryan)



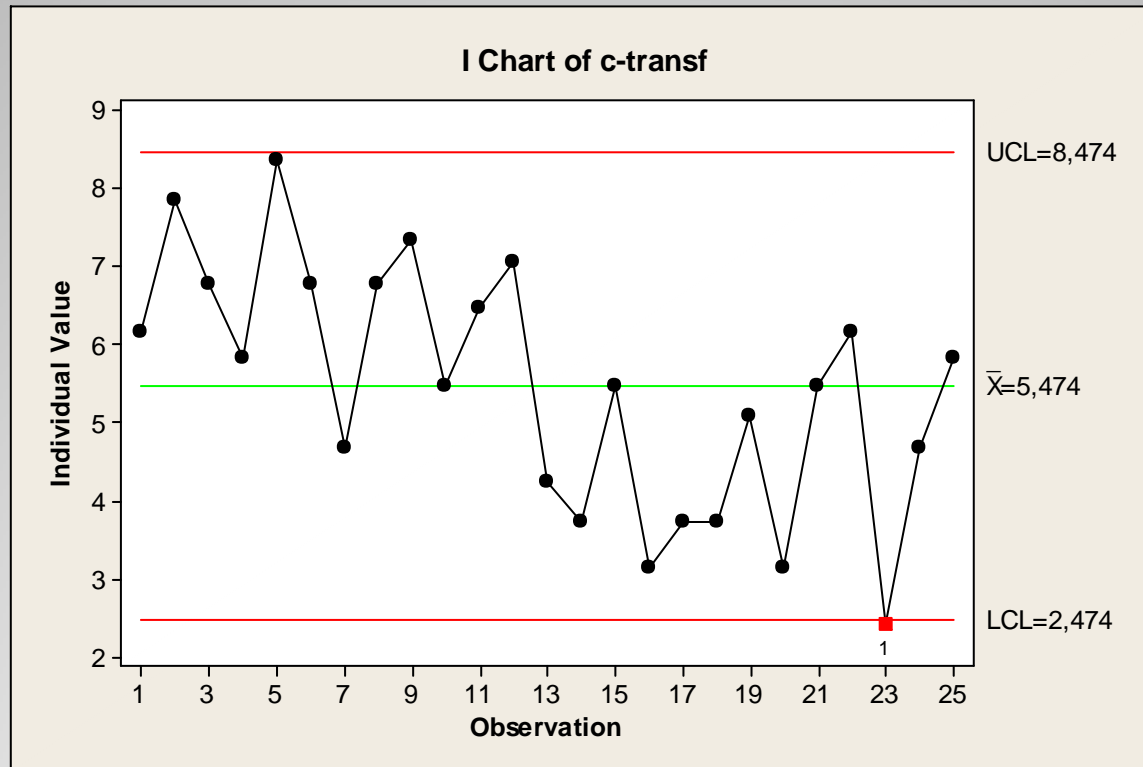
# Příklad Ford Motor (Ryan)

Základní hodnota dána:  $c_0 = 7$



# Transformace

$$y = \sqrt{c} + \sqrt{c+1}$$



Střední hodnota  $2\sqrt{\lambda}$  , směrodatná odchylka 1

# CUSUM Poisson

Průměr procesu  $\bar{c} = 7,56$

Cílová hodnota  $c_0 = 7$

Směrodatná odchylka kolísání  $c$   $\sqrt{c_0} = 2,6$

Chceme odhalit posun  $c_1 - c_0 = 2$   $c_1 = 9$

Rizika chybného rozhodnutí  $\alpha = 0,00135$   $\beta = 0,01$

Parametry CUSUM  $K^+ = K^- = 7,958$   $H^+ = 26,292$   $H^- = -18,324$

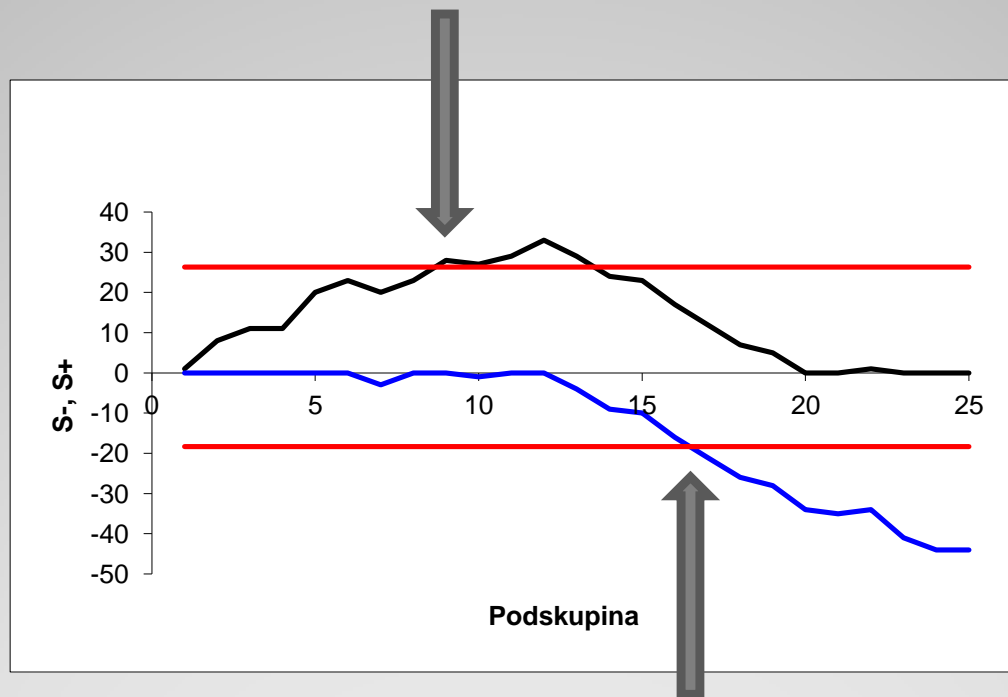
# Horní a dolní CUSUM

$$K^+ = K^- = 7,958$$

$$H^+ = 26,292$$

$$H^- = -18,324$$

prokazatelné zhoršení procesu



prokazatelné zlepšení procesu

# Sekvenční kontrola

Sledování jednotek kus po kuse

Speciální případ binomického CUSUM

pro  $n = 1$  (Bernoulliho rozdělení)

Modifikace konstanty  $K$  a mezí  $H^+$  a  $H^-$  viz [4]

Další možnost – sleduje se počet **shodných** jednotek mezi

dvěma neshodnými

(geometrické rozdělení)

# Příklad

Kumulativní počet udává, kdy se vyskytla neshodná jednotka

Kumulativní počet	51	175	250	347	415	473	958	1455
Pořadí neshodných	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	51	124	75	97	68	58	485	497
Kumulativní počet	1819	1920	1934	2170	2246	2421	2740	2808
Pořadí neshodných	9	10	11	12	13	14	15	16
Y	364	101	14	236	76	175	319	68

# CUSUM - Bernoulli

Cílová hodnota  $p_0 = 0,002$

$$\alpha = 0,00135$$

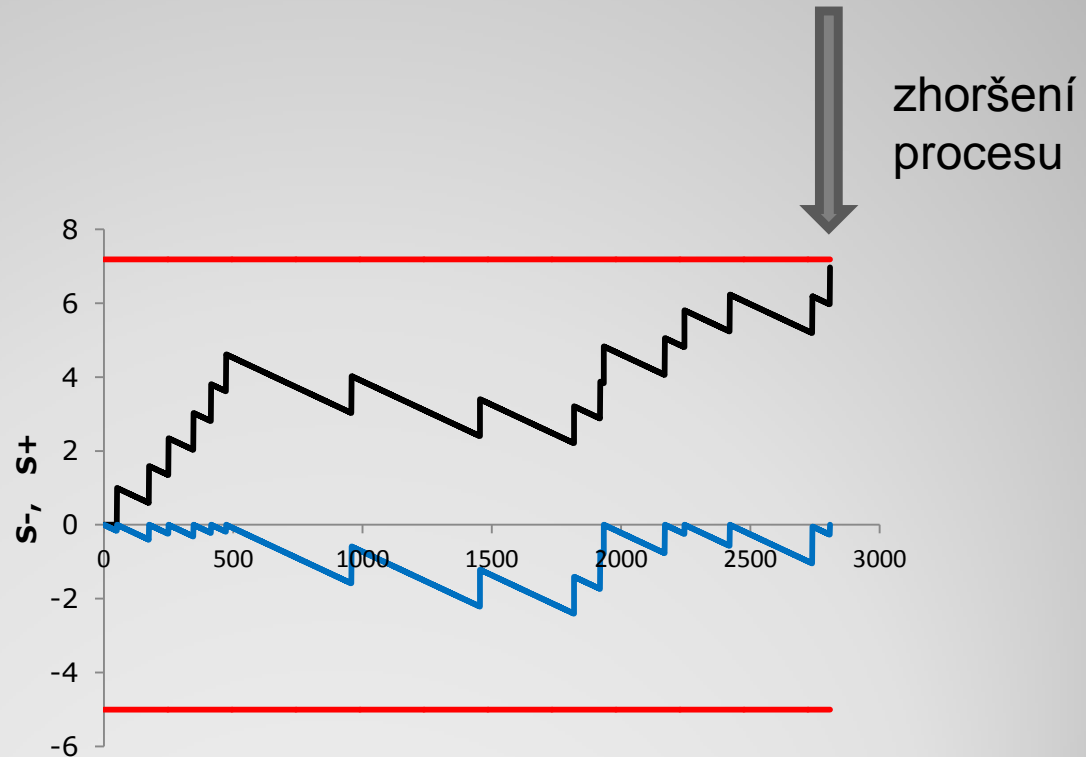
Nepřijatelná hodnota  $p_1 = 0,005$

$$\beta = 0,01$$

$$K^+ = K^- = 0,003275$$

$$H^+ = 7,188$$

$$H^- = -5,009$$





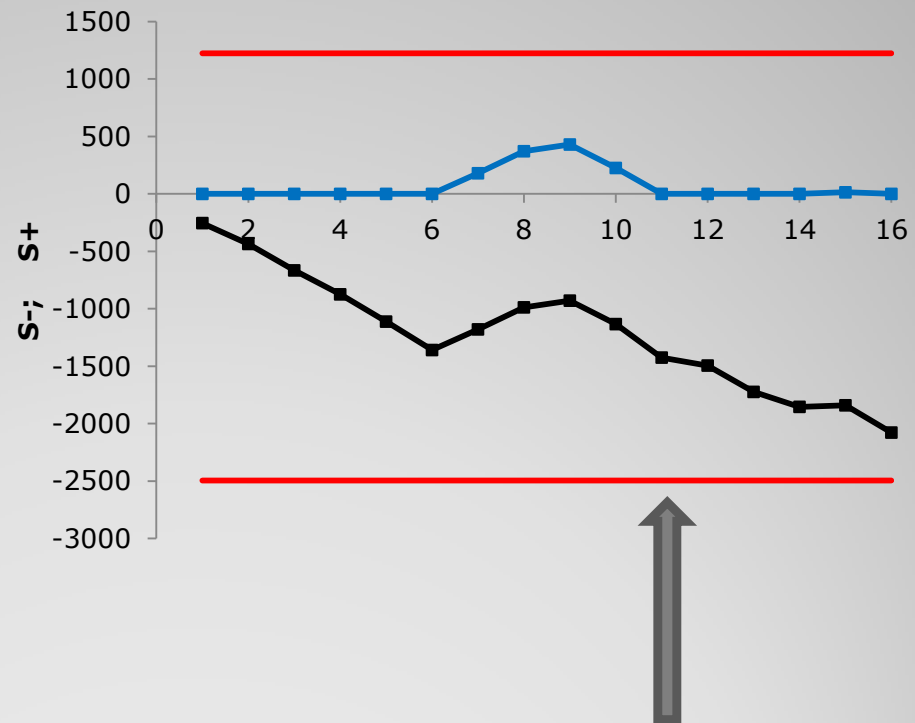
# CUSUM geometrický

$$K_G^+ = K_G^- = 1 / K_B^+ = 305,361$$

$$H_G^+ = -mH_G^+ - m + 1 = 1224$$

$$H_G^- = -mH_G^- - m + 1 = -2496$$

$$m = \lfloor K_G \rfloor$$



Překročení dolní meze představuje signál, že podíl neshodných je větší, tedy zhoršení procesu

# Literatura

1. ČSN 01 0266: 1985 Special types of statistical control: Method of cumulative sums (In Czech)
2. PAGE, E.S. Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 1954, vol. 41, pp. 100-114.
3. KENETT, R.S., ZACKS, S. Modern Industrial Statistics: Design and Control of Quality and Reliability. Pacific Grove: Duxbury Press, 1998. 621 p.
4. REYNOLDS, M.R., STOUMBOS, Z.G. A CUSUM Chart for Monitoring a Proportion When Inspecting Continuously. *Journal of Quality Technology*, 1999, Vol. 31, No. 1, pp. 87-108.
5. GOH, T.N. A control chart for very high yield processes. *Quality Assurance*, 1987, vol. 13, no. 1, pp. 18—22.
6. CHAN, L.Y., LIN, D.K.J., XIE, M., GOH, T.N. Cumulative probability control charts for geometric and exponential process characteristics. *International Journal of Production Research*, 2002, Vol. 40, No. 1, pp.133-150.